ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 8735

Класс 10 Вариант 5 Дата Олимпиады 11.02.2017

Площадка написания КНИТУ

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	5	5	5	0	5	10	0	7	15	0	52	пятьдесят два	Беау-

1. $(x+1)(x+3)(x+5)=x(x^2-9)$

$(x^2+3x+x+3)(x+5)=x^3-9x$

$x^3+5x^2+3x^2+15x+x^2+5x+3x+15=x^3-9x$

$x^3+9x^2+23x+15=x^3-9x$

$x^3+9x^2+23x+15-\cancel{x^3}+9x=0$

$9x^2+32x+15=0$

$D=32^2-4\cdot9\cdot15=484$ $\quad x_{1,2}=\dfrac{-32\pm22}{18}$ $\quad x_1=-\dfrac{10}{18}=-\dfrac{5}{9}$

$x_2=-\dfrac{54}{18}=-3$

Ответ: $x=-\dfrac{5}{9};\ x=-3.$

2. $\sqrt{22-x}-\sqrt{10-x}=2$ Область допустимых значений (ОДЗ): $22-x\geq0$ $\quad 10-x\geq0$

$x\leq22$ $\quad x\leq10$

$\sqrt{22-x}^2-\sqrt{10-x}^2=(\sqrt{22-x}-\sqrt{10-x})(\sqrt{22-x}+\sqrt{10-x})=22-x-10+x=12$

$22-x+\sqrt{22-x}\cdot\sqrt{10-x}-\sqrt{10-x}\sqrt{22-x}-10+x=12$

$\sqrt{22-x}=2+\sqrt{10-x}$ $\qquad 22-x=(2+\sqrt{10-x})^2=(4+4\sqrt{10-x}+10-x)$

$22-\cancel{x}=4+4\sqrt{10-x}+10-\cancel{x}$

$22=4+4\sqrt{10-x}+10$

$8=4\sqrt{10-x}$ $\quad 10-x=4 \Rightarrow x=6$

Ответ: $x=6$

3. $\dfrac{x^2+2}{x^2-1}<-2$ $\quad$ ОДЗ: $x\neq\pm1$ $\quad \dfrac{x^2+2}{x^2-1}+2<0$ $\quad \dfrac{x^2+2+2(x^2-1)}{x^2-1}<0$

$\dfrac{3x^2}{x^2-1}<0$ $\quad \dfrac{3x^2}{x^2-1}=0$ при $x=0$ $\quad$ + −1 − 0 − 1 + x

при $x\in(0;1)$ $\dfrac{3x^2}{x^2-1}<0$ $\qquad$ при $x\in(-1;0)$ $\dfrac{3x^2}{x^2-1}<0$

при $x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$ $\dfrac{3x^2}{x^2-1}>0$

Ответ: $x\in(-1;0)\cup(0;1)$

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

ШИФР 8735

5. $5^{2x+1} > 5^x + 4$

$5^{2x}\cdot 5 > 5^x + 4$

$5^{2x}\cdot 5 - 5^x - 4 > 0$

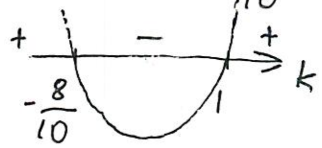
$(5^x)^2\cdot 5 - 5^x - 4 > 0$

$\cancel{k=5x}$ $5^x = k,\ k>0$

$5k^2 - k - 4 > 0$

$5k^2 - k - 4 = 0 \quad D = 1 - 4\cdot 5\cdot(-4) = 81$

$k_{1,2} = \frac{1\pm 9}{10} \quad k_1 = 1 \quad k_2 = -\frac{8}{10}$



$k \in (-\infty; -\frac{8}{10}) \cup (1; +\infty)$

т.к. $5^x > 0$, то $k \in (-\infty; -\frac{8}{10})$ не имеет смысла

Значит $5^x > 1 \Rightarrow \cancel{x>0}$ $x \geq 1$, т.к. при $x<1$ $5^x<1$

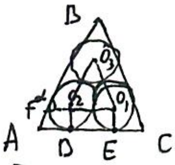
6. Пусть во II-ом корпусе x человек, тогда в I-ом $(x+4)$ человек, а в III-ем $(x+7)$ человек. Зная, что всего в 3-ех корпусах 119 человек, составим уравнение:

$x + x + 4 + x + 7 = 119$

$3x + 11 = 119$

$x = 36$ – во II-ом корпусе в I-ом: $36+4=40$ человек; в III-ем: $40+3=43$ человека

8. Если площадь минимальна, то пиццы, как окружности, соприкасаются со сторонами треугольника (каждая пицца с двумя сторонами).



O_1, O_2, O_3 – центры окружностей.

Окружность с центром O_2 касается AC в D, а окр. с ц. O_1 в E.

$O_2D = O_1E$, причем $O_2D \perp AC$ и $O_1E \perp AC \Rightarrow O_2O_1 \parallel DE$, $O_2D \parallel O_1E$.

Аналогично $O_2O_3 \parallel AB$, $O_3O_1 \parallel BC$. Продолжив прямую O_2O_1, получим угол α между AB и O_2O_1. $\triangle O_2O_3O_1$ – равносторонний т.к. $O_2O_3 = O_3O_1 = O_2O_1 = 2r$, где r – радиус трех окружностей. Раз $O_2O_3 \parallel AB$, то $\angle O_3O_2O_1 = \alpha = 60°$. Причем $O_2O_1 \parallel AC$, значит $\alpha = \angle BAC = 60°$ Аналогично получаем $\angle ACB = \angle ABC = 60°$.

Соединив A с O_2, получим два равных $\triangle$ с прямыми углами по равной гипотенузе и катету. То есть: $\triangle AO_2D = \triangle AO_2F$ ($O_2F \perp AB$, $O_2F = r$). Значит $\angle O_2AD = 30°$.

Тогда $O_2D = \frac{AO_2}{2}$. $tg\angle O_2AD = \frac{O_2D}{AD}$ $AD = \frac{O_2D}{tg 30°} = \frac{r}{\sqrt{3}/3}$. Аналогично $CE = \frac{r}{\sqrt{3}/3}$.

$S_{\triangle ABC} = \frac{CA^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\left(2r + \frac{2r}{\sqrt{3}/3}\right)^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}+6 \quad \frac{\left(4r^2 + \frac{8r^2}{(\sqrt{3}/3)} + \frac{4r^2}{3/9}\right)\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}+6$

$\sqrt{3}\left(4r^2 + \frac{8r^2}{\sqrt{3}/\sqrt{9}} + \frac{4r^2}{3/9}\right) = 16\sqrt{3}+24 \quad 4r^2 + \frac{8r^2}{\sqrt{3}/\sqrt{9}} + \frac{4r^2}{3/9} = 16 + \frac{24}{\sqrt{3}}$

$\frac{12r^2 + 72r^2 + 36r^2}{\ } = 16 + \frac{24\sqrt{3}}{3}$

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

ШИФР 8735

$\cancel{40r^2 = 16+8\sqrt{3}}$

$\cancel{r^2 = 8\sqrt{3} - 24}\ \frac{16+8\sqrt{3}}{40}$

$\cancel{r = \sqrt{\frac{16+8\sqrt{3}}{40}} = \sqrt{\frac{16}{40}+\frac{8\sqrt{3}}{40}} = \sqrt{\frac{4(4+2\sqrt{3})}{4\cdot 10}} = \sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{10}}}$

$$\frac{8r^2(6+\sqrt{3})}{3} = 16 + \frac{24\sqrt{3}}{3}$$

$$8r^2(6+\sqrt{3}) = 48+24\sqrt{3}$$

$$r^2 = \frac{48+24\sqrt{3}}{8(6+\sqrt{3})}$$

$$r = \sqrt{\frac{24(2+\sqrt{3})}{2\cdot 4(6+\sqrt{3})}} = \sqrt{\frac{6(2+\sqrt{3})}{2(6+\sqrt{3})}}$$

9. $$\frac{\sin x\cdot\sin y}{\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} y} = \frac{1}{4}$$

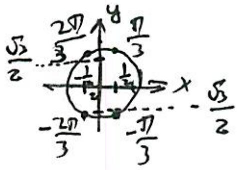
$$\cos x\cdot\cos y = \frac{1}{4}$$

$$\begin{cases}\sin x\sin y = \frac{3}{4}\\ \cos x\cdot\cos y = \frac{1}{4}\end{cases}$$

$$\sin x\cdot\sin y + \cos x\cdot\cos y = 1 \Rightarrow x = y$$

$$\sin^2 x = \frac{3}{4} \qquad \cos^2 x = \frac{1}{4}$$

$$\sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos x = \pm\frac{1}{2}$$



Ответ: $x = y = -\frac{\pi}{3} + \pi n;\ x = y = \frac{\pi}{3} + \pi n$