



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E=mc^2$$



ШИФР 11067

Класс 10 Вариант 5 Дата Олимпиады 11.02.17

Площадка написания КНИТУ

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	3	5	4	10	10	10	15	12	0	44	сорок четыре	Бегу-шев

$$1) (x+1)(x+3)(x+5) = x(x^2-9)$$

$$(x+1)(x+3)(x+5) = x(x+3)(x-3)$$

$$(x+3)((x+1)(x+5) - x(x-3)) = 0$$

$$(x+3)(x^2+6x+5 - (x^2-3x)) = 0$$

$$(x+3)(9x+5) = 0, \text{ так как произведение равно нулю, то один из множителей равен нулю}$$

$$x = -3 \text{ или } x = -\frac{5}{9}$$

$$\text{Ответ: } \{-3; -\frac{5}{9}\}$$

$$2) \sqrt{22-x} - \sqrt{10-x} = 4$$

$$\begin{cases} 22-x + (10-x) - 2\sqrt{10-x}\sqrt{22-x} = 16 \\ \sqrt{22-x} - \sqrt{10-x} \geq 0 \end{cases} \rightarrow 28$$

$$\sqrt{22-x} - \sqrt{10-x} \geq 0$$

$$30 - 2x = 2\sqrt{10-x}\sqrt{22-x}$$

Снова возведем в квадрат обе части

$$\begin{cases} 15 + x^2 - 30x = (10-x)(22-x) \cdot 2 \\ 15 - x \geq 0 \\ \sqrt{22-x} - \sqrt{10-x} \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 196 - 28x + x^2 = x^2 - 32x + 220 \\ 14 - x \geq 0 \end{cases}$$

$$196 - 28x + x^2 = x^2 - 32x + 220$$

$$14 - x \geq 0$$

$$\sqrt{22-x} - \sqrt{10-x} \geq 0$$

$$x = 6$$

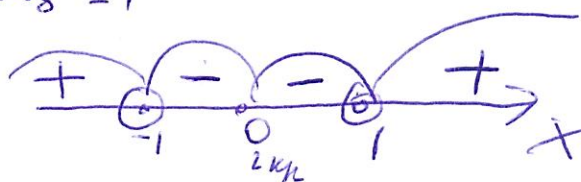
Проверим 6, оно подходит под все ограничения.

$$\text{Ответ: } x = 6$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad & \frac{x^2+2}{x^2-1} < -2 \\
 & \frac{x^2+2}{x^2-1} + 2 < 0 \\
 & \frac{x^2+2+2x^2-2}{x^2-1} < 0 \\
 & \frac{3x^2}{(x-1)(x+1)} < 0
 \end{aligned}$$

так 3х

Решим методом интервалов.
Корни это верну 0 и 2 краснот, цинь ± 1



Ответ: $x \in (-1; 0) \cup (0; 1)$

$$\begin{aligned}
 5) \quad & 5^{2x+1} > 5^x + 4 \\
 & 5^x(5^{x+1} - 1) > 4
 \end{aligned}$$

при $x=0$ $5^x(5^{x+1} - 1) = 4$, когда мы увеличиваем x , оба слагаемых увеличиваются, т.е. и произведение растет, т.е. $5^x(5^{x+1} - 1) > 4$ при $x > 0$

при уменьшении x , оба слагаемых уменьшаются, значит и произведение уменьшается, т.е. при $x < 0$ $5^x(5^{x+1} - 1) < 4$.

Ответ: $x > 0$

6) Пусть в первом корпусе живет x человек, тогда во втором живет $x-4$, а в третьем $x+3$, тогда всего людей в корпусах $x + (x+3) + (x-4) = 119$

$$\begin{aligned}
 3x &= 120 \\
 x &= 40
 \end{aligned}$$

Ответ: в 1: 40, во 2: 36, в 3: 43

7) Пусть первый член a_0 , а коэф. прогрессии это k , тогда сумма бесконечно убывающей геом. прогрессии это $\frac{a_0}{1-k}$.

Посмотрим на сумму квадратов ее членов: $a_0^2 + a_0^2 \cdot k^2 + a_0^2 \cdot k^4 + \dots$ Это есть геом. прогрессия с начальным членом a_0^2 и коэффициентом k^2 , т.е. так же убывающая ($k < 1 \rightarrow k^2 < 1$), значит ее сумма $\frac{a_0^2}{1-k^2}$

Имеем

$$\begin{cases} \frac{a_0}{1-k} = 3 \\ \frac{a_0^2}{1-k^2} = 4,5 \end{cases}$$

$$(2): \frac{a_0^2}{1-k^2} = \frac{a_0}{1-k} \cdot \frac{a_0}{1+k} = 3 \cdot \frac{a_0}{1+k} = 4,5$$

$$\begin{cases} \frac{a_0}{1-k} = 3 \quad (1) \\ \frac{a_0}{1+k} = 1,5 \quad (3) \end{cases}$$

продолжение (7)

из (1) $a_0 = 3 - 3k$, в (3): $\frac{3 - 3k}{1 + k} = 1,5$

$$2 - 2k = 1 + k$$

$$k = \frac{1}{3}$$

$$a_0 = 2$$

$$\frac{2 - 2k}{1 + k} = 1$$

Ответ: $a_0 = 2$, $k = \frac{1}{3}$

10) ~~Дана $x = 3 + \sqrt{5}$~~

9)
$$\begin{cases} \sin(x) \cdot \sin(y) = \frac{3}{4} \\ \operatorname{tg}(x) \cdot \operatorname{tg}(y) = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sin(x) \cdot \sin(y) = \frac{3}{4} \quad (1) \\ \frac{\sin(x) \cdot \sin(y)}{\cos(x) \cdot \cos(y)} = 3 \end{cases} \rightarrow \cos(x) \cdot \cos(y) = \frac{1}{4} \quad (2)$$

(1) + (2)

$$\sin(x) \cdot \sin(y) + \cos(x) \cdot \cos(y) = 1$$

$$\cos(x - y) = 1$$

$$x - y = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = 2\pi n + y, n \in \mathbb{Z}$$

→ Подставим в (2):

$$\cos(x) \cdot \cos(y) = \frac{1}{4}$$

$$\cos(2\pi n + y) \cdot \cos(y) = \frac{1}{4}$$

$$\cos(y) \cdot \cos(y) = \frac{1}{4}$$

$$\cos(y) = \pm \frac{1}{2}$$

$$y = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ:
$$\begin{cases} x = 2\pi n + \pi k \pm \frac{\pi}{3}, n \in \mathbb{Z} \\ y = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

4) $\lg(a \cdot b) = \lg(a) + \lg(b)$ (1) - в.в.

$\lg(a) = \lg(b) \rightarrow a = b$ (2) - в.в.

$\lg(x - 3) + \lg(2) = \lg(3x + 1)$ по (1)

$\lg(2) = \lg(2)$ по (1)

$\lg(2(x - 3)) + \lg(2) = \lg(3x + 1)$ несколько раз по (1):

$\lg(8(x - 3)) = \lg(3x + 1)$ по (2) в.в.

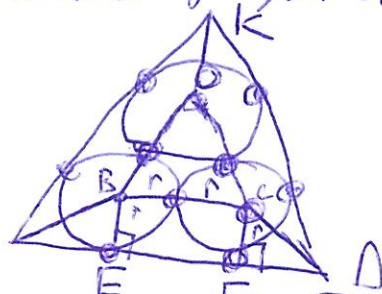
$$8x - 104 = 3x + 1$$

$$x = 21$$

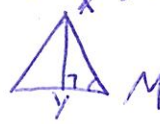
Ответ: $x = 21$

8) Заметим, что если палочка касается трех сторон коробки, то она всего одна и больше палочек не влезет, значит (т.к. это будет внешняя окружность треугольника, а она единственная и имеет наибольший радиус из всех окружностей окружности). Заметим, что три окружности (палочки) касаются друг друга единственными отрезками и пусть какая-то из сторон треугольной коробки не касается окружностей, то мы бы могли провести сторону треугольника по-другому

чертеж (8)
 и получить треугольник с меньшей площадью, т.е.
~~сторона~~ стороны нашего треугольника должны
 быть от осевых касательных
 (внешних) к кошии окружности,
 т.е. треугольник из симметрии
 равносторонний.



Давайте попробуем найти сторону того треугольника. Пусть
 она a , тогда h (высота) в равностороннем треугольнике
 это $h = a \cdot \cos 60^\circ = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$, значит $S = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$
 Из условия $S = 4\sqrt{3} + 6$, т.е.
 $\frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3} + 6 \Rightarrow a^2 = 16 + 8\sqrt{3} = (2\sqrt{3} + 2)^2 \Rightarrow a = 2\sqrt{3} + 2$



Давайте теперь посчитаем S через r
 $S = S(ABCD) = S(ABOK) + S(OKDC) + S(DLBA) + S(OBC) =$
 $= 3S(ABCD) + S(OBC)$ (т.е. мы разделили треугольник на 4 части
 и его площадь есть сумма площадей частей
 симметрии, точки 1, 2 и 3 равны
 OBC - это тоже равносторонний, т.к. каждая из его сторон это $2r$,
 т.е. его площадь из формулы выше $\frac{2^2 r^2 \sqrt{3}}{4} = r^2 \sqrt{3}$



$$S(ABCD) = S(ABE) + S(BEFC) + S(CFD)$$

$$S(ABE) = \frac{BE \cdot AE}{2} \quad S(CFD) = \frac{CF \cdot FD}{2}, \quad BE = r, \quad CF = r, \quad \text{и } AE + FD = AD - EF$$

$$S(ABE) + S(CFD) = \frac{r(AD - EF)}{2} \quad S(BEFC) = BE \cdot EF = r \cdot EF$$

$$S(ABCD) = \frac{r(AD - EF)}{2} + r \cdot EF = \frac{r(AD + EF)}{2} = \frac{r(a + 2r)}{2}$$

$$= r(\sqrt{3} + 1 + r)$$

$$S = S(ABCD) = 3S(ABCD) + S(OBC) = 3r^2 + 3r(\sqrt{3} + 1) + r^2 \sqrt{3}$$

$$r^2(3 + \sqrt{3}) + 3r(\sqrt{3} + 1) = 4\sqrt{3} + 6 = (\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} + 3)$$

$$r^2 \sqrt{3} + 3r = \sqrt{3} + 3 \quad \text{лемма квадратное уравнение, получаем}$$

$$r = 1 \quad r = -1 - \sqrt{3} \quad \text{отрицательно} \quad \text{Ответ: } r = 1$$

$$10) \sqrt[3]{9 + \sqrt{80}} + \sqrt[3]{9 - \sqrt{80}} = \sqrt[3]{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9 - 4\sqrt{5}} = \sqrt[3]{(\sqrt{5} + 2)^3} + \sqrt[3]{(\sqrt{5} - 2)^3} = 2\sqrt{5}$$