ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 13944

Класс 10 Вариант _____ Дата Олимпиады 11.02.17.

Площадка написания КНИТУ

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	5	5	0	10	10	10	15	10	10	80	восемьдесят	Бегу-

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ШИФР 13944

Задание №1 Найти все решения уравнения:

$(x+1)(x+3)(x+5) = x(x^2-9)$

$(x^2+4x+3)(x+5) = x^3-9x$

$x^3+9x^2+23x+15 = x^3-9x \quad | +9x$

$9x^2+32x+15=0$

$D = 1024-540 = 484 = (22)^2$

$x_{1,2} = \frac{-32 \pm 22}{18} \Rightarrow x_1 = -3;\ x_2 = -\frac{5}{9}$

Ответ: $x_1 = -3;\ x_2 = -5/9$

Задание №2 $\sqrt{22-x} - \sqrt{10-x} = 2$ — Решить уравнение.

$\sqrt{22-x} = 2 + \sqrt{10-x}$ т.к. $\sqrt{10-x}$ имеет значение, то $x \le 10$.

$22-x = 4 + 10 - x + 4\sqrt{10-x}$

$8 = 4\sqrt{10-x} \quad | :4$

$2 = \sqrt{10-x} \Rightarrow \sqrt{10-x} = \sqrt{4} \Rightarrow x = 6$

Ответ: $x = 6$

Задание №3 Решить неравенство.

$\frac{x^2+2}{x^2-1} < -2 \quad | +2$

$\frac{x^2+2}{x^2-1} + 2 < 0$

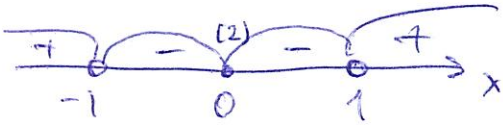
$\frac{x^2+x+2x^2-x}{x^2-1} < 0$

$\frac{3x^2}{x^2-1} < 0$

Корни числителя $(3x^2)$: 0 и 0, т.е. 0 2-ой кратности.

Корни знаменателя (x^2-1): ± 1, это выколотые точки, т.к. $x^2-1 \neq 0$

Воспользуемся методом интервалов:



$\Rightarrow x \in (-1;1) \setminus \{0\}$

т.к. при $x = 2$ значение $\frac{3x^2}{x^2-1} = \frac{3 \cdot 4}{4-1} = 4 > 0$, то на луче $(1;+\infty)$ значение положительное.

Ответ: $x \in (-1;1) \setminus \{0\}$.

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

ШИФР 13944

Задание №6| Решить задачу:

Пусть в первом корпусе живёт a человек, во втором b, в третьем — c, тогда по условию задачи мы знаем:

$$\begin{cases} a+b+c=119; \\ a-4=b; \\ a+3=c; \end{cases} \Rightarrow a+(a-4)+(a+3)=119$$

$$3a=120$$

$$a=40$$

* Заменим в ур-ии a-4 и c на a+3

$a=40 \Rightarrow b=36$ Ответ: в первом 40 человек, во втором 36, в третьем — 43

$\Rightarrow c=43$.

Задание №5| $5^{2x+1} > 5^x + 4$ — решить неравенство.

$5^x(5^{x+1}-1)>4$. Пусть $5^x=a$, тогда:

$a(5a-1)>4$.

$5a^2-a-4>0$.

$D=1+4\cdot4\cdot5=81 \Rightarrow a_{1,2}=\frac{1\pm9}{10} \Rightarrow a_1=1;\ a_2=-\frac{8}{10}$.

Т.к. нет такой степени, чтобы $5^q=-\frac{8}{10}$, то $a=1$, т.е. $x=0$ — единственный корень.

А т.к. 5^x — непрерывная функция, то $x>0$ — все решения.

Ответ: $x>0$

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ШИФР 13944

Задание №7 Нам известно $S_n = b_1(1+q+\dots+q^n) = \frac{b_1(1-q^n)}{(1-q)} = 3$

$S_n' = b_1^2(1+q^2+\dots+q^{2n}) = \frac{b_1^2(1-q^{2n})}{1-q^2} = 4{,}5 = \frac{b_1\cdot(1-q^n)}{(1-q)}\cdot\frac{b_1(1+q^n)}{(1+q)} =$

$= 3\cdot\frac{b_1(1+q^n)}{(1+q)} \Rightarrow b_1\frac{(1+q^n)}{(1+q)} = 1{,}5 = b_1(1-q+q^2+\dots-q^n)$ и

$b_1(1+q+\dots+q^n) - b_1(1-q+q^2+\dots-q^n) = 1{,}5 = 2b_1(q+q^3+\dots+q^n) \Rightarrow$

$\Rightarrow (q+q^3+\dots+q^n)b_1 = 0{,}75. \Rightarrow b_1(1+q^2+\dots+q^{n-1}) = 2{,}25.$

$\frac{b_1(1+q^2+\dots+q^{n-1})}{b_1(q+q^3+\dots+q^n)} = 3 = \frac{1+q^2+\dots+q^{n-1}}{q(1+q^2+\dots+q^{n-1})} \Rightarrow \underline{q = \frac{1}{3}}.$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_1(1-q^n)}{(1-q)} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_1(1-(1/3)^n)}{1-1/3} = \frac{b_1}{2/3} = 3 \Rightarrow \underline{b_1 = 2}.$

Ответ: $b_1 = 2$; $q = 1/3$.

Задание №9 Решить систему уравнений:

$\begin{cases}\sin x\cdot\sin y = 3/4;\\ \operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y = 3;\end{cases}$ $\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y = \frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{\sin y}{\cos y} = 3$

Т.к. $\sin x\cdot\sin y = 3/4$, то $\cos x\cdot\cos y = 1/4$.

$\cos(x-y) = \cos x\cdot\cos y + \sin x\cdot\sin y = 1.$

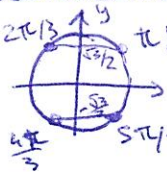
$x - y = 2\pi n,\ n\in Z.$

$x = y + 2\pi n,\ n\in Z.$

$\sin x\cdot\sin y = \sin(y+2\pi n)\sin y = \sin^2 y = 3/4 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin y = \pm\sqrt{3}/2 = \sin x$

А т.к. $\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y = 3 > 0$, то $\operatorname{tg}x$ и $\operatorname{tg}y$ одного знака. Ск. т.к. знак $\sin x$ и $\sin y$ совпадают, то и знаки $\cos x$ и $\cos y$ будут совпадать $\Rightarrow$ ~~решений нет~~ x и y — равные числа по модулю 2π.



$x = \pm\pi/2 \pm \pi/6 + 2\pi n,$
(если y $x+\pi/2$, $y+\pi/2$, ...) $n\in Z.$
то и $y = \pm\pi/2 \pm \pi/6 + 2\pi n,$
$n\in Z$

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c = a(bc)$ $E = mc^2$

ШИФР 13944.

Задание №10 Упростить и вычислить.

$\sqrt[3]{9+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{80}} =$ ~~$(\sqrt[3]{9+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{80}})((\sqrt[3]{9+\sqrt{80}})^2 + \sqrt[3]{\ldots}$~~

Пусть $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}} = a$; $\sqrt[3]{9-\sqrt{80}} = b$, тогда:

$$a+b = \frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{a^2-ab+b^2} = \frac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2} = \frac{a^3+b^3}{(a+b)^2+ab} = \frac{18}{17+1} = 1.$$

$a^3 = (\sqrt[3]{9+\sqrt{80}})^3 = 9+\sqrt{80}$; $b^3 = (\sqrt[3]{9-\sqrt{80}})^3 = 9-\sqrt{80}$

$a^3+b^3 = 9+\sqrt{80}+9-\sqrt{80} = 18$

$a \cdot b = \sqrt[3]{(9+\sqrt{80})(9-\sqrt{80})} = \sqrt[3]{1} = 1.$

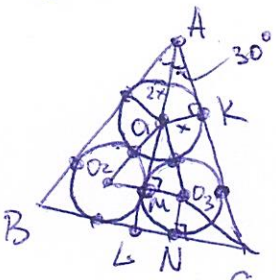
$(a+b)^2 = (\sqrt[3]{9+\sqrt{80}} - \sqrt[3]{9+\sqrt{80}})^2 = (a-\frac{1}{a})^2 = (\frac{a^2-1}{a})^2 = 17.$

Ответ: 1

Задание №4

Ответ: 3 решения?

Задание №8



Понятно, что минимум достигается, если коробка – правильный треугольник

$S_\triangle = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}+6 \Rightarrow a^2 = 16+8\sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow a = 2\sqrt{4+2\sqrt{3}} = 2\sqrt{(\sqrt{3})^2+2\sqrt{3}+1} =$

$= 2+2\sqrt{3}$ – сторона коробки правильного $\triangle$

Пусть радиус окружности равен x.

В $\triangle AOK$ $\angle AKO = 90°$; $\angle O_1AK = 30° \Rightarrow AO_1 = 2O_1K = 2x$

$\triangle O_1O_2O_3$ – правильный, со стороной $2x$, его высота O_1M равна $\frac{(2x)\sqrt{3}}{2} = x\sqrt{3}$; $O_3N = ML = x$

~~$\frac{(2x)^2\sqrt{3}}{4} = x^2\sqrt{3}$, $O_3N = ML = x$.~~

Высота AL равна: $2x + x\sqrt{3} + x = x(3+\sqrt{3}) = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{(2+2\sqrt{3})\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}+3$

$x(\sqrt{3}+3) = \sqrt{3}+3 \Rightarrow x = 1$

Ответ: радиус окружности равен 1.