



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР 14306

Класс 10 Вариант 6 Дата Олимпиады 11.02.2017г.

Площадка написания КНИТУ

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	5	5	0	0	7	10	15	15	0	63	шестьдесят три	Бесф

$$①) (x^2 + 2x + 2)(x^2 + 2x - 5) = 5$$

$$x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x^3 + 4x^2 - 4x + 2x^2 + 4x - 4 = 5$$

$$x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 9 = 0$$

2) Делители свободного члена; т.е. $-9: \pm 1; \pm 3; \pm 9$.

Решим уравнение с помощью схемы Горнера.

Схема Горнера:

x	1	4	4	0	-9	
1	1	5	9	9	0	$\Rightarrow x = 1$ - решение уравнения
-1	1	3	1	-1	-10	$\Rightarrow x = -1$ - не решение.
-3	1	2	3	0		$\Rightarrow x = -3$ - решение уравнения.

$$x^2 + 2x + 3 = 0.$$

$$D = 4 - 12 = -8 < 0 \Rightarrow \text{т.к. } D < 0 \Rightarrow \text{действительных корней нет.}$$

3) Получили 2 решения уравнения $x = 1$ и $x = -3$

Ответ: $x = 1; x = -3$

② $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-3} = 2\sqrt{x}$

1) ОДЗ:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x-3 \geq 0 \\ 2x+1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq 3 \\ x \geq -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x \geq 3.$$

2) $\sqrt{2x+1} = 2\sqrt{x} - \sqrt{x-3}$

Возведем обе части уравнения в квадрат.

$$2x+1 = (2\sqrt{x} - \sqrt{x-3})^2$$

$$2x+1 = 4x + x-3 - 4\sqrt{x(x-3)}$$

$$4\sqrt{x^2-3x} = 5x - 2x - 4$$

$$4\sqrt{x^2-3x} = 3x-4$$

$$16 \cdot (x^2-3x) = (3x-4)^2$$

$$16x^2 - 48x = 9x^2 + 16 - 24x$$

$$7x^2 - 24x - 16 = 0$$

$$D = 576 + 7 \cdot 4 \cdot 16 = 576 + 448 = 1024 = 32^2$$

$$x_1 = \frac{24+32}{14} = \frac{56}{14} = 4 - \text{удовлетворяет ОДЗ} \Rightarrow x=4 - \text{решение.}$$

$$x_2 = \frac{24-32}{14} = -\frac{8}{14} = -\frac{4}{7} - \text{не удовлетворяет ОДЗ} \Rightarrow \text{не является решением.}$$

Ответ: $x=4$

③ $\frac{x^2-2}{x^2-1} < -2$

1) ОДЗ: $x^2-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 1$

2) $\frac{x^2-2}{x^2-1} + 2 < 0$

$$\frac{x^2-2+2x^2-2}{x^2-1} < 0$$

Продолжение см. на следующем листе

Продолжение задания №3.

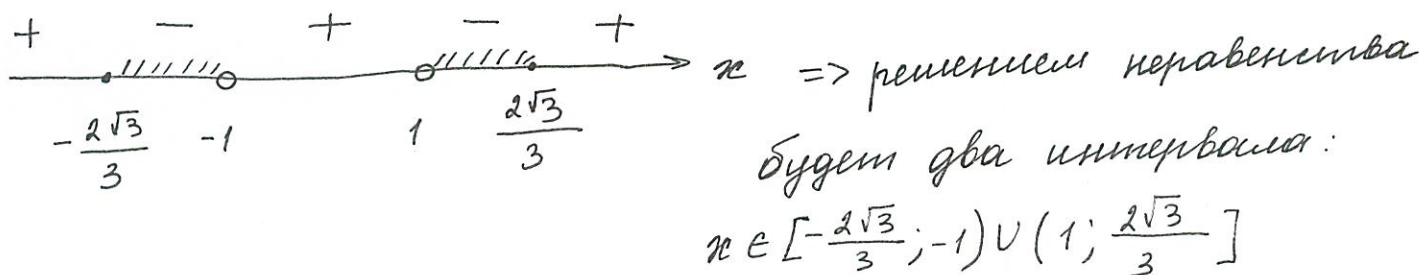
$$\frac{3x^2 - 4}{x^2 - 1} < 0$$

2) Решим данное неравенство методом интервалов:

а) $3x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$

б) $x^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 1$

$$\frac{3x^2 - 4}{x^2 - 1} < 0$$



Ответ: $x \in [-\frac{2\sqrt{3}}{3}; -1) \cup (1; \frac{2\sqrt{3}}{3}]$

⑨

$$1) \begin{cases} \sin x + \cos y = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ \sin x \cdot \cos y = -\frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos y = \frac{1-\sqrt{3}}{2} - \sin x \\ \sin x \cdot \cos y = -\frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

2) Подставим $\cos y = \frac{1-\sqrt{3}}{2} - \sin x$ в уравнение: $\sin x \cdot \cos y = -\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Получим:

$$\sin x \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2} - \sin x \right) = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{1-\sqrt{3}}{2} \cdot \sin x - \sin^2 x = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\sin^2 x - \frac{1-\sqrt{3}}{2} \cdot \sin x - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0 \quad | \cdot 2$$

$$2 \sin^2 x - (1-\sqrt{3}) \cdot \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

Продолжение см. на следующем листе.

Продолжение задания №9

$$2 \cdot \sin^2 \pi - (1 - \sqrt{3}) \cdot \sin \pi - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$D = 1 + 3 - 2\sqrt{3} + \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4 - 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 4 + 2\sqrt{3} = 3 + 2\sqrt{3} \cdot 1 + 1 = (\sqrt{3} + 1)^2$$

$$\sin \pi_1 = \frac{1 - \sqrt{3} + \sqrt{3} + 1}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \pi = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\sin \pi_2 = \frac{1 - \sqrt{3} - \sqrt{3} - 1}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \pi = (-1)^n \cdot \left(-\frac{\pi}{3}\right) + \pi n, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \pi = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

3) Рассмотрим два случая а) $\sin \pi = \frac{1}{2}$ и б) $\sin \pi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

а) $\sin \pi = \frac{1}{2} \Rightarrow$ из знаменательной системы $\Rightarrow \cos y = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} - \sin \pi \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos y = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \Rightarrow \cos y = \frac{1 - \sqrt{3} - 1}{2} \Rightarrow \cos y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \pm \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow y = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

б) $\sin \pi = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$ из знаменательной системы $\Rightarrow \cos y = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} - \sin \pi \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos y = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow \cos y = \frac{1 - \sqrt{3} + \sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos y = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow y = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

4) Объединим получившиеся значения $\pi \neq y \Rightarrow$

при $\sin \pi = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \pi = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ и $y = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

при $\sin \pi = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos y = \frac{1}{2} \Rightarrow \pi = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ и $y = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

Ответ: 1) $\pi = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ и $y = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

2) $\pi = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ и $y = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

⑦ 1) $b_1 = 1$

$$b_5 = b_1 \cdot q^{5-1} = q^4$$

$$b_9 = b_1 \cdot q^{9-1} = q^8$$

$$b_5 + b_9 = 6 \Rightarrow q^4 + q^8 = 6; \text{ пусть } q^4 = t \Rightarrow q^8 = t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t + t^2 = 6$$

$$t^2 + t - 6 = 0$$

$$D = 1 + 24 = 5^2$$

$$t_1 = \frac{-1+5}{2} = 2 \Rightarrow q^4 = 2 \Rightarrow q = \pm \sqrt[4]{2}$$

$$t_2 = \frac{-1-5}{2} = -3 \Rightarrow q^4 = -3, \text{ но } q^4 \geq 0, \text{ а } -3 < 0 \Rightarrow q^4 = -3 \text{ - не имеет смысла}$$

2) Рассмотрим два случая: а) $q = \sqrt[4]{2}$; б) $q = -\sqrt[4]{2}$

а) $q = \sqrt[4]{2}$

$$S = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}, \text{ где } n = 13, \text{ а } b_1 = 1 \Rightarrow S = \frac{q^{13} - 1}{q - 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \frac{\sqrt[4]{2^{13}} - 1}{\sqrt[4]{2} - 1} = \frac{\sqrt[4]{2^{12}} \cdot \sqrt[4]{2} - 1}{\sqrt[4]{2} - 1} = \frac{8\sqrt[4]{2} - 1}{\sqrt[4]{2} - 1} = \frac{(8\sqrt[4]{2} - 1)(\sqrt[4]{2} + 1)}{(\sqrt[4]{2} - 1)(\sqrt[4]{2} + 1)} =$$

$$= \frac{8\sqrt{2} + 8\sqrt[4]{2} - \sqrt[4]{2} - 1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{8\sqrt{2} - 1 + 7\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2} - 1} = \frac{(8\sqrt{2} + 7\sqrt[4]{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} =$$

$$= \frac{8 \cdot 2 + 8\sqrt{2} + 7\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} + 7\sqrt[4]{2} - \sqrt{2} - 1}{2 - 1} = 16 - 1 + 8\sqrt{2} + 7\sqrt[4]{2^3} + 7\sqrt[4]{2} - \sqrt{2} =$$

$$= 15 + 7\sqrt{2} + 7(\sqrt[4]{2^3} + \sqrt[4]{2}).$$

б) $q = -\sqrt[4]{2}$

$$S = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}, \text{ где } n = 13, \text{ а } b_1 = 1$$

Продолжение см. на следующем листе

Продолжение задания №7

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{q^{13} - 1}{q - 1}, \text{ где } q = -\sqrt[4]{2} \Rightarrow S = \frac{-\sqrt[4]{2}^{13} - 1}{-\sqrt[4]{2} - 1} = \frac{\sqrt[4]{2}^{13} + 1}{\sqrt[4]{2} + 1} = \\
 &= \frac{(\sqrt[4]{2}^{13} + 1)(\sqrt[4]{2} - 1)}{\sqrt[4]{2} - 1} = \frac{8\sqrt[4]{2} - 8\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{2} - 1}{\sqrt[4]{2} - 1} = \frac{(8\sqrt[4]{2} - 1 - 7\sqrt[4]{2})(\sqrt[4]{2} + 1)}{1} = \\
 &= 16 + 8\sqrt[4]{2} - \sqrt[4]{2} - 1 - 7\sqrt[4]{2}^3 - 7\sqrt[4]{2} = 15 + 7\sqrt[4]{2} - 7(\sqrt[4]{2}^3 + \sqrt[4]{2}) \Rightarrow \\
 \Rightarrow S &= 15 + 7\sqrt[4]{2} - 7(\sqrt[4]{2}^3 + \sqrt[4]{2})
 \end{aligned}$$

Ответ: 1) $q = \sqrt[4]{2} \Rightarrow S = 15 + 7\sqrt[4]{2} + 7(\sqrt[4]{2}^3 + \sqrt[4]{2})$

2) $q = -\sqrt[4]{2} \Rightarrow S = 15 + 7\sqrt[4]{2} - 7(\sqrt[4]{2}^3 + \sqrt[4]{2})$

⑥ 1) Пусть y - количество абитуриентов.

Тогда должно было принять: $4x + 3x + 6x = y \Rightarrow y = 13x$

Но приняли: $A + B + C = y + \frac{100y}{1300}$; где $A = 4x + 4$; $B = 3x + 5$

$C = 6x + 6 \Rightarrow A + B + C = 4x + 4 + 3x + 5 + 6x + 6 = 13x + 15 \Rightarrow$

$\Rightarrow 13x + 15 = y + \frac{y}{13}$

2) Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 13x = y \\ 13x + 15 = y + \frac{y}{13} \end{cases} \Rightarrow y + 15 = y + \frac{y}{13}$$

$$\frac{y}{13} = 15 \Rightarrow y = 195 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 195$ человек должен был набрать факультет, но факультет набрал $y + \frac{y}{13} \Rightarrow 195 + 15 = 210$ человек. На специальностях A должно было быть: $A = 4x = 4 \cdot \frac{y}{13} = 4 \cdot 15 = 60$, но набрали $A' = A + 4 = 60 + 4 = 64$

Продолжение см. на следующем листе.

Продолжение задания №6.

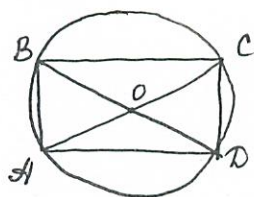
$B = 3\pi$, где $y = 13\pi \Rightarrow \pi = \frac{y}{13} \Rightarrow B = 3 \cdot \frac{y}{13} = 3 \cdot 15 = 45$, но набрали $B' = B + 5 = 45 + 5 = 50$

$C = 6\pi$, где $y = 13\pi \Rightarrow \pi = \frac{y}{13} \Rightarrow C = 6 \cdot \frac{y}{13} = 6 \cdot 15 = 90$, но набрали $C' = C + 6 = 90 + 6 = 96$.

3) Получилось: на специальность А - 64
на специальность В - 50
на специальность С - 96

Ответ: на специальность А - 64; на специальность В - 50,
на специальность С - 96.

Р



Дано: окружность с центром в т. О; $R = 10$ см;

$S_{\text{прям.}} \cdot 2 = S_{\text{окр.}}$

Найти: стороны прямоугольника.

Решение: 1) $S_{\text{окр.}} = \pi R^2 = 3,14 \cdot 100 = 314 \text{ см}^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{\text{прям.}} = \frac{1}{2} \cdot S_{\text{окр.}} = \frac{1}{2} \cdot 314 \text{ см}^2 = 157 \text{ см}^2 \Rightarrow S_{\text{прям.}} = AB \cdot BC = 157 \text{ см}^2$.

2) Рассмотрим $\triangle ABC$: т.к. $ABCD$ - прямоугольник $\Rightarrow \angle ABC = 90^\circ \Rightarrow \triangle ABC$ - прямоугольный $\Rightarrow$ окружность описана вокруг прямоугольного треугольника ABC .

То св-ву прямоугольного треугольника $\Rightarrow$, что гипотенуза AC - диаметр окружности описанной около треугольника $ABC \Rightarrow AC = 2 \cdot R = 20$ см.

По теореме Пифагора $\Rightarrow AB^2 + BC^2 = AC^2 \Rightarrow AB^2 + BC^2 = 400$

3) Составим систему уравнений, записанных в 1 и 2 пунктах.

Продолжение см. на следующей листе

Продолжение задания №8.

$$\begin{cases} AB \cdot BC = 157; \\ AB^2 + BC^2 = 400, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AB = \frac{157}{BC}; \\ AB^2 + BC^2 = 400, \end{cases} \Rightarrow BC^2 + \frac{157^2}{BC^2} = 400 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Пусть } t = BC^2 \Rightarrow t^2 - 400t + 157^2 = 0$$

$$\begin{aligned} D &= 400^2 - 4 \cdot 157^2 = 400^2 - 314^2 = (400 - 314)(400 + 314) = \\ &= 86 \cdot 714 = 4 \cdot 43 \cdot 357 = (2\sqrt{43 \cdot 357})^2 \end{aligned}$$

$$t_1 = \frac{400 + 2\sqrt{43 \cdot 357}}{2} = 200 + \sqrt{43 \cdot 357} \Rightarrow BC = \sqrt{200 + \sqrt{43 \cdot 357}}$$

$$t_2 = \frac{400 - 2\sqrt{43 \cdot 357}}{2} = 200 - \sqrt{43 \cdot 357} \Rightarrow BC = \sqrt{200 - \sqrt{43 \cdot 357}}$$

4) Рассмотрим два случая а) $BC = \sqrt{200 + \sqrt{43 \cdot 357}}$ б) $BC = \sqrt{200 - \sqrt{43 \cdot 357}}$

а) $BC = \sqrt{200 + \sqrt{43 \cdot 357}}$

$$AB^2 + BC^2 = 400$$

$$AB^2 = 400 - 200 - \sqrt{43 \cdot 357}$$

$$AB = \sqrt{200 - \sqrt{43 \cdot 357}}$$

б) $BC = \sqrt{200 - \sqrt{43 \cdot 357}}$

$$AB^2 + BC^2 = 400$$

$$AB^2 = 400 - 200 + \sqrt{43 \cdot 357}$$

$$AB = \sqrt{200 + \sqrt{43 \cdot 357}}$$

5) Заметим, что стороны рассматриваемые случаи идентичны $\Rightarrow$ существует только один прямоугольник

со сторонами $\sqrt{200 - \sqrt{43 \cdot 357}}$ и $\sqrt{200 + \sqrt{43 \cdot 357}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt{200 - \sqrt{15351}} \text{ и } \sqrt{200 + \sqrt{15351}}$$

Ответ: $\sqrt{200 - \sqrt{15351}}$ и $\sqrt{200 + \sqrt{15351}}$