

ШИФР 14356

Класс 10 Вариант 5 Дата Олимпиады 11.02.2017

Площадка написания КНИТУ

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	5	3	5	10	10	10	15	14	20	97	девяносто семь	Белу-

№9. Ответ: $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, y = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$; $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, y = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$; $x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k, y = \frac{4\pi}{3} + 2\pi n$; $x = \frac{5\pi}{3} + 2\pi k, y = \frac{5\pi}{3} + 2\pi n$

Решения: будем решать систему для $0 \leq x, y < 2\pi$, т.к. при добавлении к x или y $2\pi \cdot k$, где $k \in \mathbb{Z}$ синусы и тангенсы не меняются, а значит к каждому из ответов в этих промежутках нам просто надо будет добавить $2\pi k$ (и наоборот, если у данной системы есть решение x, y , то вытеки из каждого корня такие $2\pi a$ и $2\pi b$ ($a, b \in \mathbb{Z}$), чтобы $x - 2\pi a$ и $y - 2\pi b$ попали в $[0; 2\pi)$, тогда эти новые числа тоже будут явл-ся корнями системы) и мы получим все реш-я системы. Теперь, заметим, что $\tan^3 x = \tan^3 y$

$$\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos y \cdot \cos x = \frac{1}{4}. \text{ Заметим, что}$$

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2} \text{ и } \cos x \cdot \cos y = \frac{\cos(x-y) + \cos(x+y)}{2}$$

$$\text{Значит, } \cos(x-y) = \frac{\cos(x-y) + \cos(x+y)}{2} + \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}$$

$$= \sin x \cdot \sin y + \cos x \cdot \cos y = 1 \Rightarrow \cos(x-y) = 1. \text{ Т.к. } |x-y| < 2\pi,$$

$$\text{получаем, что } x-y=0, \text{ т.е. } x=y. \text{ Также, } \cos(x+y) = \frac{\cos(x-y) + \cos(x+y)}{2} - \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}$$

$$= \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y = -\frac{1}{2}.$$

Заметим, что $0 \leq x+y < 4\pi$, и $\cos(x+y) = -\frac{1}{2}$, то есть $x+y$ равно $\frac{2\pi}{3}$ или $\frac{4\pi}{3}$ или $2\pi + \frac{2\pi}{3}$ или $2\pi + \frac{4\pi}{3}$. Тогда $x=y = \frac{\pi}{3}$ или $\frac{2\pi}{3}$ или $\frac{4\pi}{3}$ или $\frac{5\pi}{3}$ соответственно



№9. Продолжение: Значит, в промежутке $[0; 2\pi)$ система имеет 4 пары решений $x = y = \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}$. Как мы сказали выше, все решения данной системы получаются из решений в промежутке $[0; 2\pi)$ прибавлением к x $2\pi n$, а к y $2\pi m$, $n, m \in \mathbb{Z}$, откуда и ответ: $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, y = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$; $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, y = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$; $x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k, y = \frac{4\pi}{3} + 2\pi n$; $x = \frac{5\pi}{3} + 2\pi k, y = \frac{5\pi}{3} + 2\pi n$; $k, n \in \mathbb{Z}$

Замечание: если $\cos t = -\frac{1}{2}$, то $t = 2\pi - k \pm \frac{2\pi}{3}$, где $k \in \mathbb{Z}$, а так как $0 \leq t < 4\pi$, то ~~тогда~~ корнями ур-я явл-ся $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, 2\pi + \frac{2\pi}{3}, 2\pi + \frac{4\pi}{3}$ ($t = x + y$)

Утв-е (1) верно, т.к. при добавлении к x и y - корням системы $2\pi n$ и $2\pi m$, они по-прежнему будут явл-ся корнями. ($x, y \in [0; 2\pi)$). А с другой стороны выт-я из корней системы x и y по $2\pi n$ и $2\pi m$, так, чтобы они попали в $[0; 2\pi)$, они тоже будут явл-ся корнями.

№6. Пусть в I корпусе = x чел., во II = y чел. Тогда в III = $119 - x - y$. По условию задачи, $x = y + 4$ (1) и $x = (119 - x - y) - 3 = 116 - x - y$ (2). Во (2) рав-ве добавим к обеим частям $2x$: $2x = 116 - y$ (3). Сложим (1) и (3): $x + 2x = y + 4 + 116 - y$ или $3x = 120 \Rightarrow x = 40$. Подставив в (1): $40 = y + 4 \Rightarrow y = 40 - 4 = 36$. Значит, в I корп. живёт 40 чел., во II 36 чел., тогда т.к. всего во всех 3 корп. живёт 119, то в III корп. $119 - 40 - 36 = 43$ чел.

Ответ: в I - 40 чел., во II - 36 чел., в III - 43 чел.

N1. Ответ: $x = -3; -\frac{5}{9}$. Решение: Заметим, что $x(x^2-9) = x(x-3) \cdot (x+3)$. Если $x = -3$, то обе части ур-я равны 0 $\Rightarrow -3$ - корень, иначе можно сократить обе части на $(x+3)$ и получим $(x+1)(x+5) = x(x-3)$ или после раскрытия скобок: $x^2+6x+5 = x^2-3x$. Перенесём всё влево: $x^2+6x+5-(x^2-3x)=0$, то есть $9x+5=0$, откуда $x = -\frac{5}{9}$. *подходит по условию*

N2. Ответ: $x=6$. Решение: ОДЗ: $x \leq 10$. $\sqrt{22-x} - \sqrt{10-x} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{22-x} = 2 + \sqrt{10-x}$. Возведём обе части в квадрат: $22-x = 4 + 4\sqrt{10-x} + (10-x)$. Сократим и получим, что $8 = 4\sqrt{10-x}$ (вычли из обеих частей по $10-x$). Сократили на 4: $2 = \sqrt{10-x}$. Возведём в 2 степень: $4 = 10-x \Rightarrow x = 6$ - подходит по ОДЗ (возводить в 2 степень обе части было можно, т.к. обе части уравнения были ≥ 0).

N3. Ответ: $x \in (-1; 1)$. Решение: Рассмотрим 2 случая: 1) $x^2-1 > 0$, домножим обе части нер-ва на x^2-1 , тогда знак не мен-ся, получим, что $x^2+2 < (-2)(x^2-1) = -2x^2+2$, вычтем из обеих частей по 2 и добавим $2x^2$: $3x^2 < 0$, что невозможно ($x^2 \geq 0$ для $\forall x$). 2) $x^2-1 < 0$ (=быть не может, т.к. x^2-1 стоит в знаменателе исход-го ур-я) $\Rightarrow x \neq \pm 1$ (ОДЗ ур-я: $x \neq \pm 1$). Тогда после домножения обеих частей нер-ва на x^2-1 знак ^{нер-ва} мен-ся на ^{на противоположный} и мы получим, что $x^2+2 > (-2)(x^2-1) = -2x^2+2 \Leftrightarrow 3x^2 > 0$, что верно для $\forall x$, но $x^2-1 < 0$, т.е. $x^2 < 1 \Rightarrow |x| < 1$, т.е. $-1 < x < 1$, поэтому ответом будет $\forall x$ принадлежащий $(-1; 1)$ (мы получили систему условий на x : $\begin{cases} x^2-1 < 0 \\ 3x^2 > 0 \end{cases}$ решением которой явл-ся все $x \in (-1; 1)$).

N7 Ответ: её первый член 2. Решение: Пусть первый член посл-ти = b , второй равен bq , третий bq^2 , ..., n -й = $b \cdot q^{n-1}$, ...

Тогда сумма $b + bq + bq^2 + \dots = \frac{b}{1-q}$, что по условию равно 3, т.е. $\frac{b}{1-q} = 3$. Также, по условию, $b^2 +$

$(bq)^2 + (bq^2)^2 + \dots = 4,5$. Заметим, что $b^2 + (bq)^2 + (bq^2)^2 + \dots = b^2(1 + q^2 + q^4 + q^6 + \dots) = b^2 + b^2 \cdot q^2 + b^2 \cdot (q^2)^2 + b^2 \cdot (q^2)^3 + \dots =$

= сумма геом-й прогрессии с 1-м членом = b^2 , и знаменателем равным $q^2 = \frac{b^2}{1-q^2}$. Значит, $\frac{b^2}{1-q^2} = 4,5$. Заметим, что

$4,5 = \frac{b^2}{1-q^2} = \frac{b}{1-q} \cdot \frac{b}{1+q} = 3 \cdot \frac{b}{1+q} \Rightarrow \frac{b}{1+q} = 1,5 \Rightarrow b = 1,5 +$

$+ 1,5q$ (1), также т.к. $\frac{b}{1-q} = 3$, то $b = 3 - 3q$ (2). Умножим

(1) на 2 и сложим со (2): ~~$2b = 3 + 3q$~~ . $2b + b = (3 + 3q) + (3 - 3q)$ или $3b = 6 \Rightarrow b = 2$. Тогда,

подставив в (2) $b = 2$, получим, что $3q = 3 - 2 = 1 \Rightarrow q = \frac{1}{3}$. Значит ^{искомой} 1-й член геом. прогрессии равен 2,

а её знаменатель равен $\frac{1}{3}$, т.е. она имеет вид

$2, 2 \cdot \frac{1}{3}, 2 \cdot (\frac{1}{3})^2, 2 \cdot (\frac{1}{3})^3, \dots$

N10. Ответ: 3. Решение: пусть $a = \sqrt[3]{9+\sqrt{80}}$, $b = \sqrt[3]{9-\sqrt{80}}$. Тогда
 $a^3 = 9 + \sqrt{80}$ и $b^3 = 9 - \sqrt{80} \Rightarrow a^3 + b^3 = 18$ (Заметим, что $9 - \sqrt{80}$,
 $9 + \sqrt{80} > 0 \Rightarrow a, b > 0$). Также, $ab = \sqrt[3]{(9+\sqrt{80})(9-\sqrt{80})} =$
 $= \sqrt[3]{81-80} = \sqrt[3]{1} = 1$ ($ab > 0$). Тогда, $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b +$
 $+ 3ab^2 + b^3 = 18 + 3ab(a+b) = 18 + 3(a+b)$. Пусть $t = a+b$,
 тогда, $t^3 = 3t + 18 \Rightarrow t^3 - 3t - 18 = 0$. Заметим, что
 при $t=3$, $3^3 - 3 \cdot 3 - 18 = 0 \Rightarrow (t^3 - 3t - 18) = (t-3)(t^2 + 3t + 6)$
 (по ~~формуле~~ действительно, $(t-3)(t^2 + 3t + 6) = t^3 - 3t^2 + 3t^2 - 9t + 6t - 18 =$
 $= t^3 - 3t - 18$). Заметим, что $t^2 + 3t + 6 > 0$
 т.к. $t > 0$. Значит, единственным корнем ур-я
 $t^3 - 3t - 18 = 0$ явл-ся $t=3$, откуда и ответ:
 $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{80}} = a+b=t = \boxed{3}$ ОТВЕТ: 3

N5. Ответ: $x > 0$. Решение: Пусть $x > 0$, тогда $5^{2x+1} > 5^x + 4 \Leftrightarrow 5^{2x+1} -$
 $- 5^x > 4$, т.е. $5^x(5^{x+1} - 1) > 4$ (1). Заметим, что
 $5^x > 1$, $x+1 > 1$, значит $5^{x+1} > 5^1 = 5$, следовательно,
 $5^x \cdot (5^{x+1} - 1) > 1 \cdot (5 - 1) = 4$, т.е. (1) верно, след-но усл-е выполн-ся.
 Пусть $x=0$, тогда $5^{2x+1} = 5$, $5^x + 4 = 5$, т.е. ~~усл-е~~ не выполн-ся. Пусть
 $x < 0$, тогда $5^{2x+1} > 5^x + 4 \Leftrightarrow 5^x(5^{x+1} - 1) > 4$, но $5^x < 1$, т.к. $x < 0$,
 а $5^{x+1} < 5^1 = 5 \Rightarrow 5^{x+1} - 1 < 4$. Значит $5^x(5^{x+1} - 1) < 1 \cdot 4 =$
 4 ($5^x > 0$, поэтому, если $5^{x+1} - 1 \leq 0$, то произв-е $\leq 0 < 4$, иначе оно
~~меньше~~ полож-е, но меньшее $1 \cdot 4 = 4$). Мы доказали, что при $x \leq 0$,
 $5^{2x+1} \leq 5^x + 4$, а при $x > 0$ $5^{2x+1} > 5^x + 4$, откуда получаем ответ:
 $x > 0$.

№4. Ответ: $x=21$ ОДЗ: ~~$x > 13$~~ $x > 13$, $3x+1 > 0$

Решение: $\lg(x-13) + 3 \cdot \lg 2 = \lg(3x+1)$

Заметим, что $10^{\lg 2 \cdot 3} = (10^{\lg 2})^3 = (2)^3 = 8$.

Возведём 10 в ст-нь слева и справа:

$$10^{\lg(x-13) + 3 \cdot \lg 2} = 10^{\lg(3x+1)}$$

$$10^{\lg(x-13)} \cdot 10^{3 \cdot \lg 2} = 10^{\lg(3x+1)}$$

т.к. $10^{\lg(x-13)} = x-13$ и $10^{\lg(3x+1)} = 3x+1$

$$(x-13) \cdot 8 = 3x+1, \text{ раскрыв скобки получим, что}$$

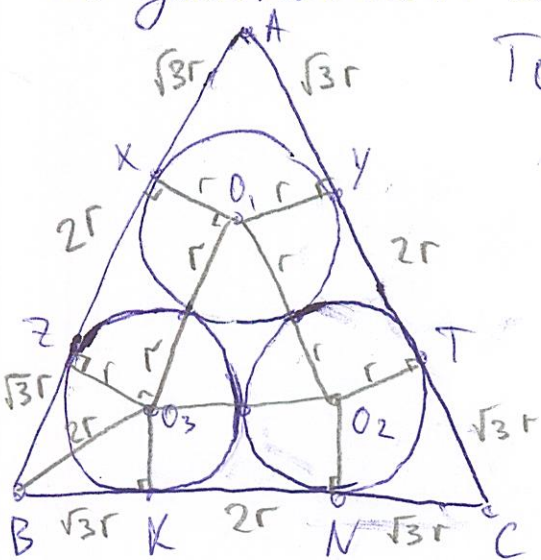
$$8x - 104 = 3x+1, \text{ добавим к обеим частям по } 104 \text{ и вычтем}$$

$$5x = 105, \text{ поделим обе части на } 5:$$

$$x = 21 - \text{подходит по ОДЗ}$$

№8 Реш Ответ: 1 дм

Решение: Заметим, что минимальная площадь треугольника внутри которого лежат три неких попарно касающихся окр-ты достигается когда каждая сторона треугольника касается с двумя из окружностей, иначе можно уменьшить его площадь. Тогда, если r - радиус окр-



то отрезки $XZ = YT = KN = 2r$, т.к. XO_1O_3Z , YO_1O_2T , O_2NKO_3 - прямоугольнички. Так как ABC - правильный треугольник, то $\angle ZBO_3 = 30^\circ \Rightarrow BO_3 = 2r \Rightarrow BZ = \sqrt{3}r$. Аналогично, $AX = AY = TC = NC = \sqrt{3}r$.

Тогда площадь $S_{ABC} = \frac{(2\sqrt{3}r + 2r)^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$

$= \frac{(4r^2 + 8\sqrt{3}r^2 + 12r^2)\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}r^2 + 6r^2$, по условию

если a - стор. прав-го Δ , то $S = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$

Задано $S(ABC) = 4\sqrt{3} + 6 \text{ дм}^2$. Значит, $(4\sqrt{3} + 6)r^2 = 4\sqrt{3} + 6 \text{ дм}^2 \Rightarrow r^2 = 1 \text{ дм}^2 \Rightarrow r = 1 \text{ дм}$