ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 3485

Класс 11 Вариант 5 Дата Олимпиады 11.02.2017

Площадка написания КНИТУ

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	5	5	5	5	10	10	10	15	14	20	99	девяносто девять	[illegible]

№1

$$(x+1)(x+3)(x+5)=x(x^2-9)$$
$$(x+1)(x+3)(x+5)=x(x+3)(x-3)$$
$$(x+1)(x+3)(x+5)-x(x+3)(x-3)=0$$
$$(x+3)((x+1)(x+5)-x(x-3))=0$$
$$(x+3)(x^2+6x+5-x^2+3x)=0$$
$$(x+3)(9x+5)=0$$
$$\left[\begin{array}{l} x+3=0 \\ 9x+5=0 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=-\frac{5}{9} \end{array}\right.$$

Ответ: $x=-3$; $x=-\frac{5}{9}$

№2 $\sqrt{22-x}-\sqrt{10-x}=2$; ОДЗ: $\begin{array}{l} 22-x\geq 0 \\ 10-x\geq 0 \end{array} \Rightarrow \boxed{x\leq 10}$

Возведем обе части в квадрат:

$$(\sqrt{22-x}-\sqrt{10-x})^2=2^2$$
$$32-2x-2\sqrt{22-x}\sqrt{10-x}=4$$
$$2\sqrt{22-x}\sqrt{10-x}=28-2x$$
$$\sqrt{22-x}\sqrt{10-x}=14-x$$

Возведем обе части в квадрат

$$(22-x)(10-x)=(14-x)^2$$
$$220+\cancel{x^2}-32x=196-28x+\cancel{x^2}$$
$$4x=24$$
$$\boxed{x=6}$$

Ответ: $x=6$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

ШИФР 3485

№3 $\frac{x^2+2}{x^2-1}<-2$

$\frac{x^2+2}{x^2-1}+2<0$

$\frac{x^2+\cancel{2}+2x^2-\cancel{2}}{x^2-1}<0$

$\frac{3x^2}{x^2-1}<0$

Воспользуемся методом интервалов

$\underset{-1}{+}\quad \underset{0}{-} \quad - \quad \underset{1}{+} \quad x$

$x\in(-1;0)\cup(0;1)$

Ответ: $x\in(-1;0)\cup(0;1)$

№4 $\lg(x-13)+3\lg 2=\lg(3x+1)$, ОДЗ: $x-13>0$, $3x+1>0$ $\Rightarrow$ $\boxed{x>13}$

$\lg(x-13)+\lg 2^3=\lg(3x+1)$

$\lg(x-13)+\lg 8=\lg(3x+1)$

$\lg(x-13)\cdot 8=\lg(3x+1)$

Так как функции слева и справа одинаковые и основание у обоих логарифмов равно 10, то $(x-13)8=(3x+1)$

$8x-104=3x+1$

$5x=105$

$\boxed{x=21}$

Ответ: $x=21$

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ШИФР 3485

№5 $5^{2x+1} > 5^x + 4$

$5 \cdot 5^{2x} > 5^x + 4$

Пусть $5^x = t$, $t > 0$

Тогда: $5 \cdot t^2 > t + 4$

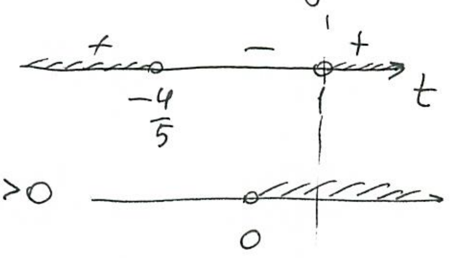
$5t^2 - t - 4 > 0$

$t^2 - \frac{1}{5}t - \frac{4}{5} > 0$

по теор. Виета

$(t-1)(t+\frac{4}{5}) > 0$

Воспользуемся методом интервалов



$\Rightarrow t > 1$

Обратная замена $5^x > 1$

$x > \log_5 1$

$\boxed{x > 0}$

Ответ: $x > 0$

№6 Всего 119 человек. По условию в первом корпусе на 4 чел. больше, чем во втором, в первом ~~корп~~ корпусе на 3 чел. меньше, чем в третьем. Тогда пусть x человек живет в первом корпусе. Значит $(x-4)$ человек живет во втором корпусе. $(x+3)$ человек живет в третьем корпусе. Получается, что $x + (x-4) + (x+3) = 119$

Решим уравнение: $x + (x-4) + (x+3) = 119$

$3x - 1 = 119$

$3x = 120$

$x = 40$ человек живет в первом корпусе

$\Rightarrow$ $x - 4 = 40 - 4 = 36$ человек живет во втором корпусе

$x + 3 = 40 + 3 = 43$ человека живет в третьем корпусе

Ответ: 40 человек живет в первом ~~корп~~ корпусе, 36 человек живет во втором корпусе, 43 человека живет в третьем корпусе.

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

ШИФР 3485

$\boxed{№7}$ $S_1 = 3$
$S_2 = 4{,}5$

Как известно, сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии вычисляется следующей формулой: $S = \frac{b_1}{1-q}$, где b_1 – первый член
$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} \ldots$

Запишем S_1 : $S_1 = \frac{b_1}{1-q} = 3 \Rightarrow b_1 = 3(1-q) \Rightarrow b_1 = 3-3q$

$S_2 = 4{,}5$ – сумма квадратов членов ~~бех~~ бесконечно убывающей геометрической прогрессии, т.е. $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 \ldots = 4{,}5$

$b_1 = 3-3q$, $b_2 = (3-3q)q$, $b_3 = (3-3q)q^2$

$\Rightarrow b_1^2 = (3-3q)^2$, $b_2^2 = (3-3q)^2 q^2$, $b_3 = (3-3q)^2 q^4$

Заметим, что получилась геометрическая прогрессия, в которой $b_1 = (3-3q)^2$, $q' = \frac{b_2^2}{b_1^2} = q^2$ и сумма (по условию) равна 4,5

Опять воспользуемся формулой $S = \frac{b_1}{1-q}$

Для нашего случая она будет иметь следующий вид

$$S_2 = \frac{b_1}{1-q'} = \frac{(3-3q)^2}{1-q^2} = 4{,}5$$

$\Rightarrow (3-3q)^2 = 4{,}5(1-q^2) \Rightarrow 9 - 18q + 9q^2 = 4{,}5 - 4{,}5q^2$

$13{,}5q^2 - 18q + 4{,}5 = 0$

$D = 18^2 - 4 \cdot 13{,}5 \cdot 4{,}5 = 81$

$q_1 = \frac{18-9}{2 \cdot 13{,}5} = \frac{1}{3}$

$q_2 = \frac{18+9}{2 \cdot 13{,}5} = 1$ – лишний корень, т.к. при $q=1$, прогрессия не будет убывающей.

$b_1 = 3 - 3q = 3 - 3 \cdot \frac{1}{3} = 2$

Ответ: первый член $b_1 = 2$, $q = \frac{1}{3}$

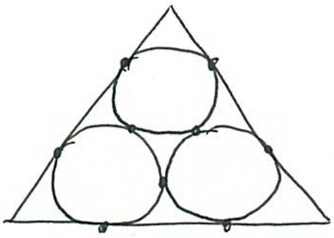
ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

ШИФР 3485

№8 Рассмотрим случай, когда площадь коробки наименьшая из возможных: $S = 4\sqrt{3}+6$ дм^2

Наименьшая площадь коробки означает, что пиццы касаются друг друга, касаются стенок коробки и не перекрывают друг друга. Выглядит это так:



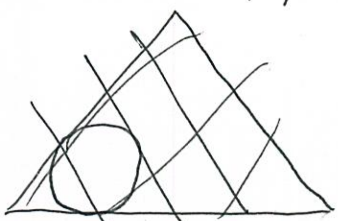
Так как все эти окружности одинаковые, все они симметрично ~~касаются~~ касаются сторон треугольника, то в силу симметрии этот треугольник равносторонний.

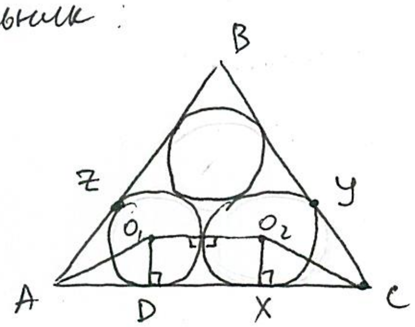
Как известно, площадь равностороннего треугольника такова: $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, где a – сторона равностороннего треугольника.

По условию $S = 4\sqrt{3}+6$. $\Rightarrow 4\sqrt{3}+6 = a^2\frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow a^2 = 8\sqrt{3}+16 = (2\sqrt{3}+2)^2$

$\Rightarrow \boxed{a = 2\sqrt{3}+2}$

Рассмотрим треугольник:





Понятно, что $O_1O_2 = r+r = 2r$, где r – радиус пиццы

$\angle DAO_1 = 30°$, т.к. $\angle ZAD = 60°$ (треугольник равносторонний), $AZ = AD$ (отрезки касательных) AO_1 – бис. угла ZAD

Аналогично, $\angle XCO_2 = 30°$

$O_1D = O_2X = r$

Тогда $AC = a = AD + DX + CX$;

$AD = O_1D \cdot ctg30° = r\sqrt{3}$

$XC = O_2X\, ctg30° = r\sqrt{3}$

$DX = O_1O_2 = 2r$ (т.к. O_1O_2XD – прямоугольник)

$\Rightarrow AC = a = r\sqrt{3} + 2r + r\sqrt{3} = 2\sqrt{3}r+2r$ и $a = 2\sqrt{3}+2$ (по найденному выше)

$\Rightarrow 2\sqrt{3}r+2r = 2\sqrt{3}+2 \Rightarrow (2\sqrt{3}+2)r = 2\sqrt{3}+2 \Rightarrow r = 1$ дм

Ответ: $r = 1$ дм

№9 $\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{3}{4} \\ \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x \sin y = \frac{3}{4} & (1) \\ \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\sin y}{\cos y} = 3 & (2) \end{cases}$

Подставим (1) во (2): $\dfrac{\frac{3}{4}}{\cos x \cos y} = 3 \Rightarrow \dfrac{1}{4\cos x \cos y} = 1 \Rightarrow \cos x \cos y = \frac{1}{4}$

$\cancel{\cos x \cos y =}$ $\cancel{\frac{\cos(x-y) + \sin(x+y)}{2}}$ $\cancel{\cos(x+y) + \cos}$

$$\cos x \cos y = \frac{\cos(x-y) + \cos(x+y)}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\boxed{\cos(x-y) + \cos(x+y) = \frac{1}{2}} \quad (3)$$

$$\sin x \sin y = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2} = \frac{3}{4}$$

$$\boxed{\cos(x-y) - \cos(x+y) = \frac{3}{2}} \quad (4)$$

(3) + (4) $\quad 2\cos(x-y) = 2$

$$\cos(x-y) = 1$$

$$\boxed{x - y = 2\pi k,\ k \in Z} \quad (5)$$

(3) − (4) $\quad 2\cos(x+y) = -1$

$$\cos(x+y) = -\frac{1}{2}$$

$$\boxed{x + y = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z} \quad (6)$$

(5)+(6) $\quad 2x = 2\pi k \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \Rightarrow \boxed{x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z}$

(6)−(5) $\quad 2y = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k - 2\pi k \Rightarrow y = \pm\frac{\pi}{3}$

Заметим, что данное уравнение симметричное, т.е. при замене ~~x на y~~ x на y и y на x ничего не изменится. т.е. $x = y = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$

Ответ: $x = y = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$.

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

ШИФР 3485

№10 $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}$

Вспомним, что $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

Заметим, что $\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^3=\frac{27}{8}+3\cdot\frac{9}{4}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}+3\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}+\frac{5\sqrt{5}}{8}=9+4\sqrt{5}=9+\sqrt{80}$

$\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^3=\frac{27}{8}-3\cdot\frac{9}{4}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}+3\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}-\frac{5\sqrt{5}}{8}=9-4\sqrt{5}=9-\sqrt{80}$

Тогда $\sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^3}+\sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^3}=\frac{3}{2}+\cancel{\frac{\sqrt{5}}{2}}+\frac{3}{2}-\cancel{\frac{\sqrt{5}}{2}}=3$

Т.е. $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}=3$

Ответ: 3.