ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 4838

Класс 11 Вариант 6 Дата Олимпиады 11.02.2017

Площадка написания КНИТУ

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	5	5	4	5	10	8	10	0	7	20	74	семьдесят четыре	Бегу-

№1

$(x^2+2x+2)(x^2+2x-2)=5 \Leftrightarrow (x^2+2x)^2-4=5 \Leftrightarrow (x^2+2x)^2=9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+2x=3, \\ x^2+2x=-3, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=-3, \\ \varnothing, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=-3. \end{array}\right.$

Ответ: $-3; 1$.

№2

$\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}=2\sqrt{x} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 3, \\ 2x+1+2\sqrt{(2x+1)(x-3)}+x-3=4x, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 3, \\ x+2=2\sqrt{2x^2-5x-3}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 3, \\ x^2+4x+4=8x^2-20x-12, \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x\geq 3, \\ 7x^2-24x-16=0; \end{cases}$

$7x^2-24x-16=0$

$D_1=144+112=16^2$

$x_1=\frac{12+16}{7}=4 \quad x_2=\frac{12-16}{7}=-\frac{4}{7}$, вернёмся к исходной системе: $\begin{cases} x\geq 3, \\ \left[\begin{array}{l} x=4, \\ x=-\frac{4}{7}, \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=4$

Ответ: 4.

№3

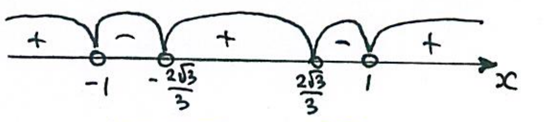
$\frac{x^2-2}{x^2-1}<-2 \Leftrightarrow \frac{x^2-2}{x^2-1}+\frac{2x^2-2}{x^2-1}<0 \Leftrightarrow \frac{3x^2-4}{(x+1)(x-1)}<0 \Leftrightarrow \frac{3\left(x-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\left(x+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)}{(x-1)(x+1)}<0$

1) $f(x)=\frac{3\left(x-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\left(x+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)}{(x-1)(x+1)}$ (1)

2) $D(f): x\neq \pm 1$

3) $f(x)=0$, при $x=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$

4) Числа $\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$ разбивают область определения функции (1) на интервалы, на каждом из которых ф-ия сохраняет знак.



Ответ: $\left(-1; -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}; 1\right)$.

№4

$$\log_4(2x+3)+\log_4(x-1)=2-\log_4\frac{16}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1, \\ \log_4((2x+3)(x-1))=\log_4 16-\log_4\frac{16}{3}, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x>1, \\ \log_4(2x^2+x-3)=\log_4 3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1, \\ 2x^2+x-3=3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1, \\ 2x^2+x-6=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1, \\ \left[\begin{array}{l} x=-2, \\ x=1{,}5, \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=1{,}5.$$

Ответ: 1,5.

№5

$$4^x>4-3\cdot2^x$$

Пусть $2^x=t\ (t>0)$, тогда $4^x=t^2$, н-во примет вид:

$$t^2>4-3t, \Leftrightarrow t^2+3t-4>0, \Leftrightarrow (t-1)(t+4)>0, \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t<-4\ (\text{п.с.к.}), \\ t>1. \end{array}\right.$$

Вернёмся к старой переменной: $2^x>1, \Leftrightarrow x>\log_2 1 \Leftrightarrow x>0.$

Ответ: $(0;+\infty)$.

№6

Пусть планировалось набрать на специальность A – (4x) студентов, тогда на B – (3x), на C – (6x).

Зная, что на специальности A, B, C взяли на ~~$7\frac{9}{13}\%$~~ 4, 5, 6 (соотв.) человек больше, а план приёма перевыполнили на $7\frac{9}{13}\%$, составим систему ур-ий:

$$\begin{cases} 4x+3x+6x=S, \\ 13x+4+5+6=\dfrac{107\frac{9}{13}}{100}S, \end{cases}$$ где S – план приёма на факультет.

Вычитая первое неравенство из второго, получим: $15=\dfrac{7\frac{9}{13}}{100}S$

$$S=\frac{1500}{\frac{100}{13}}=15\cdot13=195=13x,\ \text{значит}\ x=15.$$

Тогда приняли: на сп-сть A: $4x+4=64$ чел.

на сп-сть B: $3x+5=50$ чел.

на сп-сть C: $6x+6=96$ чел

Ответ: 64; 50; 96 чел. соответственно.

№7

Дано:
геом. прогресс.
$b_1+b_9=6$
$b_1=1$
$S_{13}=?$

Решение:

$b_1=1;\ b_5=b_1q^4;\ b_9=b_1q^8$

$b_1+b_9=6=b_1q^4(1+q^4)=q^4(1+q^4)=2(1+2) \Rightarrow q^4=2$, тогда $q=\pm\sqrt[4]{2}$

Рассмотрим оба случая:

I) $q=\sqrt[4]{2}$:

$S_{13}=b_1+b_2+b_3\ldots+b_{13}=b_1(1+q+q^2+q^3+\ldots q^{12})$

$S_{13}=1+\sqrt[4]{2}+\sqrt{2}+\sqrt[4]{8}+2+2\sqrt[4]{2}+2\sqrt[4]{8}+2\sqrt{2}+4+4\sqrt[4]{2}+4\sqrt{2}+4\sqrt[4]{8}+8=15+7(2^{\frac14}+2^{\frac12}+2^{\frac34})$

II) $q=-\sqrt[4]{2}$

Аналогично, $S_{13}=15+7(2^{\frac12}-2^{\frac14}-2^{\frac34})$

Ответ: 1) $15+7(2^{\frac14}+2^{\frac12}+2^{\frac34})$
2) $15+7(2^{\frac12}-2^{\frac14}-2^{\frac34})$

№10

$\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}+\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=\sqrt[3]{2\sqrt{2}+12+12\sqrt{2}+8}+\sqrt[3]{8-12\sqrt{2}+12-2\sqrt{2}}=$

$=\sqrt[3]{(2+\sqrt{2})^3}+\sqrt[3]{(2-\sqrt{2})^3}=2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}=4$

Ответ: 4

№9

$$\begin{cases} \sin x+\cos y=\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \\ \sin x\cos y=-\frac{\sqrt{3}}{4}; \end{cases}$$

$\sin x\cos y=\frac12\sin(2x+2y)=-\frac{\sqrt{3}}{4}$

$$\left[\begin{array}{l} 2x+2y=-\frac{\pi}{3}+2\pi n\,(n\in z), \\ 2x+2y=-\frac{2}{3}\pi+2\pi n\,(n\in z), \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=-\frac{\pi}{6}+\pi n\,(n\in z), \\ x+y=-\frac{\pi}{3}+\pi n\,(n\in z), \end{array}\right.$$

$$\sin x+\cos y=\frac{1-\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases}\sin x=0{,}5, \\ \cos y=-\frac{\sqrt{3}}{2},\end{cases} \\ \begin{cases}\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos y=0{,}5,\end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+2\pi l\,(l\in z), \\ x=\frac{5}{6}\pi+2\pi l\,(l\in z),\end{array}\right. \\ y=\pm\frac{5}{6}\pi+2\pi k\,(k\in z),\end{cases} \\ \begin{cases}y=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi e\,(e\in z), \\ \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{3}+2\pi z\,(z\in z), \\ x=-\frac{2}{3}\pi+2\pi z\,(z\in z).\end{array}\right.\end{cases} \end{array}\right.$$

Удовлетворяет условию системы следующая серия корней: $\left[\begin{array}{l} y=\frac{\pi}{3}+2\pi e\,(e\in z) \\ x=-\frac{2}{3}\pi+2\pi e\,(e\in z) \end{array}\right.$