ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 6425

Класс 11 Вариант 6 Дата Олимпиады 11.02.17

Площадка написания КНИТУ

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	5	5	5	5	10	8	10	7	7	18	80	восемьдесят	[illegible]

№1

$(x^2+2x+2)(x^2+2x-2)=5$

$(x^2+2x)^2-4=5$

$(x^2+2x)^2=9$

$x^2+2x=3$

$x^2+2x-3=0$

$D=4+12=16,\ D>0$

$(x+3)(x-1)=0$

$x=-3$ или $x=1$

Ответ: $-3;\ 1$

$x^2+2x=-3$

$x^2+2x+3=0$

$D=4-12=-8,\ D<0$

$\varnothing$

№3

$\frac{x^2-2}{x^2-1}<-2$

ОДЗ: $x^2-1\neq 0$

$x^2\neq 1$

$x\neq \pm 1$

$\frac{x^2-2}{x^2-1}+2<0$

$\frac{x^2-2+2x^2-2}{x^2-1}<0$

$\frac{3x^2-4}{x^2-1}<0$

$\frac{(\sqrt{3}x-2)(\sqrt{3}x+2)}{(x-1)(x+1)}<0$

$\frac{2}{\sqrt{3}}>1$

$\frac{4}{3}>1$

$1\frac{1}{3}>1$

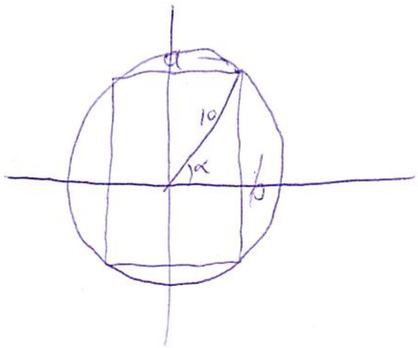
$x\in\left(-\frac{2\sqrt3}{3};-1\right)\cup\left(1;\frac{2\sqrt3}{3}\right)$

Ответ: $\left(-\frac{2\sqrt3}{3};-1\right)\cup\left(1;\frac{2\sqrt3}{3}\right)$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ШИФР 6425

№8



$S_{круга} = \pi R^2 = 100\pi \Rightarrow S_{прям.} = 50\pi$

$ab = 50\pi$

$2 \cdot 10 \cdot \sin\alpha \cdot 2 \cdot 10\cos\alpha = 50\pi$

$\sin\alpha \cos\alpha = \frac{\pi}{8}$

$\cos^2\alpha \, tg\alpha = \frac{\pi}{8}$

$tg\alpha = \frac{\pi}{8}(tg^2\alpha + 1)$

$\frac{\pi}{8} tg^2\alpha - tg\alpha + \frac{\pi}{8} = 0$

Заменим $tg\alpha = t$

$\frac{\pi}{8}t^2 - t + \frac{\pi}{8} = 0$, $D = 1 - 4 \cdot \frac{\pi^2}{64} = 1 - \frac{\pi^2}{16} = \frac{16-\pi^2}{16}$, $D > 0$, т.к. $\pi < 4$

$t = \frac{1 \pm \frac{1}{4}\sqrt{16-\pi^2}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4 \pm \sqrt{16-\pi^2}}{\pi} = tg\alpha$

$\frac{b}{a} = \frac{4 \pm \sqrt{16-\pi^2}}{\pi}$

$b\pi = 4a \pm a\sqrt{16-\pi^2}$

$b^2\pi^2 + 16a^2 - 8ab\pi = a^2(16-\pi^2)$

$b^2\pi^2 + \cancel{16a^2} - 400\pi^2 = \cancel{16a^2} - a^2\pi^2$

$b^2\pi^2 + a^2\pi^2 = 400\pi^2 \quad | : \pi^2, \pi > 0$

$b^2 + a^2 = 400$

$\left(\frac{50\pi}{a}\right)^2 + a^2 = 400$

$\frac{2500\pi^2}{a^2} + a^2 = 400$

$\frac{2500\pi^2 + a^4 - 400a^2}{a^2} = 0$, $a > 0$

$a^2 = t$, $t > 0$

$t^2 - 400t + 2500\pi^2 = 0 \Rightarrow$ дальше?

$D = 1600 - 10000$

2

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ГАЗПРОМ

ШИФР 6425

9.

$$\begin{cases} \sin x+\cos y=\frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ \sin x\cdot\cos y=-\frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

$(\sin x+\cos y)^2=\sin^2x+\cos^2y+2\sin x\cos y$

$\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2=\sin^2x+\cos^2y+2\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

$\frac{4-2\sqrt{3}}{4}=\sin^2x+\cos^2y-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$1-\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin^2x+\cos^2y-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$1=\sin^2x+\cos^2y$

$1-\sin^2x=\cos^2y$ $\qquad$ $1-\cos^2y=\sin^2x$

$\cos^2x=\cos^2y$ $\qquad$ $\sin^2y=\sin^2x$

$\cancel{\cos^2x-\cos^2y=0}$ $\qquad$ $\sin y=\pm\sin x$

$(\cos x-\cos y)(\cos x+\cos y)=0$

$\cos x=\cos y$ $\qquad$ $\cos x=-\cos y$

$\cos x-\cos y=0$ $\qquad$ $\cos x+\cos y=0$

$-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}=0$ $\qquad$ $2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=0$

$\sin\frac{x+y}{2}=0$ $\qquad$ $\sin\frac{x-y}{2}=0$ $\qquad$ $\cos\frac{x+y}{2}=0$ $\qquad$ $\cos\frac{x-y}{2}=0$

$\frac{x+y}{2}=\pi n, n\in Z$ $\qquad$ $\frac{x-y}{2}=\pi n, n\in Z$ $\qquad$ $\frac{x+y}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$ $\qquad$ $\frac{x-y}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$

$x+y=2\pi n, n\in Z$ $\qquad$ $x-y=2\pi n, n\in Z$ $\qquad$ $x+y=\pi+2\pi n, n\in Z$ $\qquad$ $x-y=\pi+2\pi n, n\in Z$

$x=2\pi n-y, n\in Z$ $\qquad$ $x=y+2\pi n, n\in Z$ $\qquad$ $x=\pi-y+2\pi n, n\in Z$ $\qquad$ $x=y+\pi+2\pi n, n\in Z$

$x=\pm y+2\pi n, n\in Z$ или $x=\pi\pm y+2\pi n, n\in Z$

$\cos x=\pm\cos y$

~~Ответ~~ $\qquad$ $\cos y=\pm\cos x$

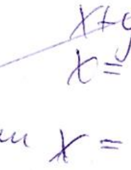
$\cos x=\pm\sqrt{1-\sin^2 x}$

$\cos y=\pm\sqrt{1-\sin^2y}$ $\qquad$ $\cos x=\pm\sqrt{1-\sin^2y}$

$\pm\sin y\cos y=-\frac{\sqrt{3}}{4}$

$\sin 2y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$2y=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in Z$



$y=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z$

Ответ: $\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi n; \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n\right)$

$\left(-\frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n; \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n\right)$

$\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n; \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n\right)$

~~Ответ~~

3

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

ШИФР 6425

№7 $b_1=1$

$b_5+b_9=6$

$b_1\cdot q^4+b_1\cdot q^8=6$

$q^4+q^8=6$

Замена $q^4=t$, $t\geq 0$

$t^2+t-6=0$

$(t+3)(t-2)=0$

$t=-3$ $t=2$

не подходит

$q^4=2$

$q=\pm\sqrt[4]{2}$

$q=\pm 2^{\frac{1}{4}}$

$S=\frac{b_1(q^n-1)}{q-1}=\frac{\pm 8\sqrt[4]{2}-1}{\pm\sqrt[4]{2}-1}$

$S=1\pm\sqrt[4]{2}+\sqrt{2}\pm\sqrt[4]{8}+2\pm 2\sqrt[4]{2}+2\sqrt{2}\pm 2\sqrt[4]{8}+4\pm 4\sqrt[4]{2}+4\sqrt{2}\pm 4\sqrt[4]{8}+8=$

$=15\pm 7\sqrt[4]{2}+7\sqrt{2}\pm 7\sqrt[4]{8}$

Ответ: $15\pm 7\sqrt[4]{2}+7\sqrt{2}\pm 7\sqrt[4]{8}$

№2

$\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}=2\sqrt{x}$, ОДЗ: $2x+1\geq 0$ $x-3\geq 0$ $x\geq 0$

$2x\geq -1$ $x\geq 3$

$x\geq -0{,}5$

$2x+1+x-3+2\sqrt{(2x+1)(x-3)}=4x$

$2\sqrt{(2x+1)(x-3)}=x+2$

$4(2x+1)(x-3)=(x+2)^2$

$8x^2-20x-12=x^2+4x+4$

$7x^2-24x-16=0$

$D=24^2+16\cdot 4\cdot 7$, $D>0$

$(7x+4)(x-4)=0$

$x=-\frac{4}{7}$ или $x=4$

не подходит по ОДЗ

Ответ: 4

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

ШИФР 6425

№6

Пусть на факультет А по плану поступает 4x, тогда в В — 3x, в С 6x. По условию на А поступило $4x+4$, на В $3x+5$, на С $6x+6$, ~~....~~ план приёма превышен на $7\frac{9}{13}\%$, то есть в $\left(1+\frac{100}{13}\cdot\frac{1}{100}\right)$

$$(3x+4x+6x)\left(1+\frac{100}{13}\cdot 0{,}01\right) = \cancel{\ldots}(4x+4)+(3x+5)+(6x+6)$$

$$13x\left(1+\frac{100\cdot 1}{13\cdot 100}\right)=13x+15$$

$$13x\cdot\frac{14}{13}=13x+15$$

$$14x=13x+15$$

$$x=15$$

на А поступило: $4x+4=64$

на В: $3x+5=50$

на С: $6x+6=96$

Ответ: 64; 50; 96

№10.

$$\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}+\sqrt{20-\sqrt{392}}=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$$

Предположим, что под корнем спрятан куб какого-то выражения, а так как есть корень можно предположить, что корень есть и в выражении

$$(a+\sqrt{c})^3=a^3+c\sqrt{c}+3a^2\sqrt{c}+3ac$$

$$\begin{cases} a^3+3ac=20 \\ \sqrt{c}(c+3a^2)=14\sqrt{2} \end{cases}$$

Чтобы корень сократился, допустим, что $c=2$

$2+3a^2=14$

$3a^2=12$

$a^2=4$

$a=\pm 2$

$2^3+3\cdot 2\cdot 2=20$

$20=20$

Рассмотрим второе слагаемое: $(2-\sqrt{2})^3=8-2\sqrt{2}+12-12\sqrt{2}$

$(2-\sqrt{2})^3=20-14\sqrt{2}$

$(-2)^3+3(-2)\cdot 2=20$

$-20\neq 20$

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}=\sqrt[3]{(2+\sqrt{2})^3}+\sqrt[3]{(2-\sqrt{2})^3}=2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}=4$$

Ответ: 4

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

ШИФР 6425

№4

$\log_4(2x+3)+\log_4(x-1)=2-\log_4\left(\frac{16}{3}\right)$

ОДЗ: $2x+3>0$ $\quad$ $x-1>0$

$2x>-3$ $\quad$ $x>1$

$x>-1,5$

$\log_4(2x+3)(x-1)=\log_4 16-\log_4\left(\frac{16}{3}\right)$

$\log_4(2x+3)(x-1)=\log_4\left(16:\frac{16}{3}\right)$

$\log_4(2x+3)(x-1)=\log_4 3$

$\log_4(2x+3)(x-1)-\log_4 3=0$

$\log_4\frac{(2x+3)(x-1)}{3}=0$

$\frac{(2x+3)(x-1)}{3}=1$

$(2x+3)(x-1)=3$

$2x^2+x-3=3$

$2x^2+x-6=0$

$D=1+24=25,\ D>0$

$(2x-3)(x+2)=0$

$x=1,5$ $\quad$ $x=-2$ (не подходит по ОДЗ)

Ответ: 1,5

№5

$4^x>4-3\cdot2^x$

$2^{2x}>4-3\cdot2^x$

Замена $2^x=t,\ t>0$

$t^2>4-3t$

$t^2+3t-4>0$

$D=9+16=25$

$(t+4)(t-1)>0$

~~$t=-4$~~

$t\in(-\infty;-4)\cup(1;+\infty)$

по ОДЗ: $t\in(1;+\infty)$

$2^x>1$

$x>0$

Ответ: $(0;+\infty)$