

**ШИФР** 13956

Класс 11 Вариант 5 Дата Олимпиады 11.02.2017

Площадка написания КНИТУ

| Задача | 1 | 2 | 3 | 4 | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | $\Sigma$ |              | Подпись |
|--------|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----------|--------------|---------|
|        |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    | Цифрой   | Прописью     |         |
| Оценка | 5 | 5 | 5 | 4 | 10 | 10 | 10 | 15 | 13 | 0  | 44       | сорок четыре | Бегу-   |

$$(x+1)(x+3)(x+5) = x(x^2-9)$$

$$(x+1)(x+3)/(x+5) = x/(x-3)(x+3)$$

$$(x+3)((x+1)(x+5) - x(x-3)) = 0$$

$$\begin{cases} x+3=0 \\ x^2+6x+5-x^2+3x=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-3 \\ 9x+5=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-3 \\ x^2=-5/9 \end{cases}$$

Ответ:  $x = -3$ ;  $-5/9$

$$\sqrt{22-x} - \sqrt{10-x} = 2$$

$$\sqrt{22-x} = 2 + \sqrt{10-x}$$

$$22-x = 4 + 4\sqrt{10-x} + 10-x$$

$$8 = 4 + \sqrt{10-x}$$

$$4 = \sqrt{10-x}$$

$$16 = 10-x$$

$$x = 6 \in [0, 10]$$

Ответ:  $x = 6$

$$\frac{x^2+2}{x^2-1} < -2$$

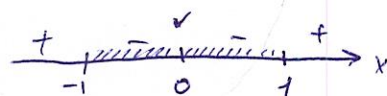
$$\frac{x^2+2}{x^2-1} + 2 < 0$$

$$\frac{x^2+2+2x^2-2}{(x-1)(x+1)} < 0$$

$$\frac{3x^2}{(x-1)(x+1)} < 0$$

$x=0$  - корни кратности 2

Ответ:  $x \in (-1; 0) \cup (0; 1)$



Если  $x \geq 2$ , то:  $\frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 3} = 4 > 0$

$$\lg(x-13) + 3\lg 2 = \lg(3x+1) \quad \sim 4$$

$$\lg(x-13) + \lg 8 = \lg(3x+1) \quad \text{орз?}$$

$$\lg(8 \cdot (x-13)) = \lg(3x+1)$$

Основание одинаково, зп-т,

$$8x - 104 = 3x + 1$$

$$5x = 105$$

$$x = 21$$

Ответ:  $x = 21$

$$5^{2x+1} > 5^x + 4 \quad (1) \quad \sim 5$$

В одной системе коорд построим графики урний  $y = 5^{2x+1}$  и  $y = 5^x + 4$

$$y = 5^{2x+1}$$

$$y = 5^x + 4$$

|   |     |      |   |     |
|---|-----|------|---|-----|
| x | -1  | -1/2 | 0 | 1/2 |
| y | 1/5 | 1    | 5 | 25  |

|   |       |   |   |    |
|---|-------|---|---|----|
| x | -1    | 0 | 1 | 2  |
| y | 4 1/5 | 5 | 9 | 29 |

по построению

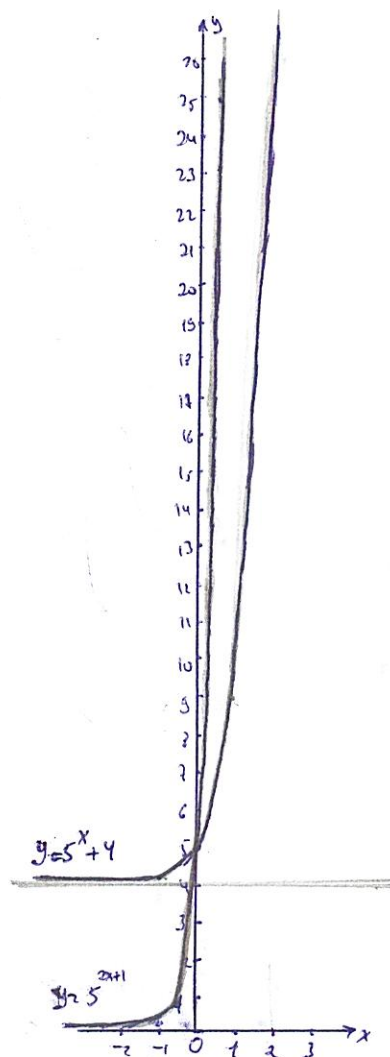
видно, что при  $x \geq 0$  график  $y = 5^{2x+1}$  при увеличении  $x$  растёт быстрее графика  $y = 5^x + 4$ . А

учитывая то, что ф-ии  $y = 5^{2x+1}$  и  $y = 5^x + 4$  монотонно

возрастающие, можем сказать, что пер-во (1)

выполняется при  $x > 0$

Ответ:  $x > 0$



~ 6

Пусть в 1 корпусе живет  $x$  человек, тогда во 2 корпусе живет  $(x-4)$  человек, а в 3 корпусе —  $(x+3)$ . Сумма человек в 3-х корпусах равна 119. Составим уравнение:

$$x + x - 4 + x + 3 = 119$$

$$3x - 1 = 119$$

$$3x = 120$$

$$x = 40$$

$$x + 3 = 43$$

$$x - 4 = 36$$

Ответ: в 1 корпусе 40 человек, во 2 — 36 человек, в 3 — 43 человека.

~ 7

Пусть нам дана прогрессия :  $b, bq, bq^2, \dots$ . Тогда при возведении каждого члена в квадрат получим :  $b^2, b^2q^2, b^2q^4, \dots$ . Получили геом. прогрессию с 1 членом  $b^2$  и частным  $q^2$ .

$$S_1 = b \cdot \frac{1}{1-q} = 3$$

$$S_2 = b^2 \cdot \frac{1}{1-q^2} = 4,5$$

Получим систему:

$$\begin{cases} \frac{b}{1-q} = 3 \\ \frac{b}{1-q} - \frac{b}{1+q} = 4,5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{b}{1-q} = 3 \\ \frac{b}{1+q} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 3-3q \\ 2b = 3+3q \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3b = 6 \\ b = 3-3q \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 2 \\ 3q = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 2 \\ q = \frac{1}{3} \end{cases}$$

мы можем умножить обе части на  $(1 \pm q)$ , так при  $q \neq \pm 1$  у нас будет неубывающая геометрическая прогрессия

Нам была дана прогрессия :  $2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \dots$

Ответ :  $b=2; q=\frac{1}{3}$ .

~ 9

$$\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = \frac{3}{4} \\ \tan x \cdot \tan y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = \frac{3}{4} \\ \frac{\sin x \cdot \sin y}{\cos x \cdot \cos y} = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = \frac{3}{4} \\ \cos x \cdot \cos y = \frac{1}{4} \\ \cos x \cdot \cos y \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x \cdot \cos y + \sin x \sin y = 1 \\ \cos x \cdot \cos y - \sin x \sin y = \frac{1}{2} \\ \cos x \neq 0 \\ \cos y \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(x-y) = 1 \\ \cos(x+y) = \frac{1}{2} \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ y \neq \frac{\pi}{2} + \pi l, l \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y = 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x+y = \frac{2}{3}\pi + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \\ x+y = \frac{4}{3}\pi + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2\pi n + y, n \in \mathbb{Z} \\ 2y + 2\pi n = \frac{2}{3}\pi + 2\pi m, m, n \in \mathbb{Z} \\ 2y + 2\pi n = \frac{4}{3}\pi + 2\pi m, m, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2\pi n + y, n \in \mathbb{Z} \\ y = \frac{1}{3}\pi + 2\pi(m-n), m, n \in \mathbb{Z} \\ y = \frac{2}{3}\pi + 2\pi(m-n), m, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

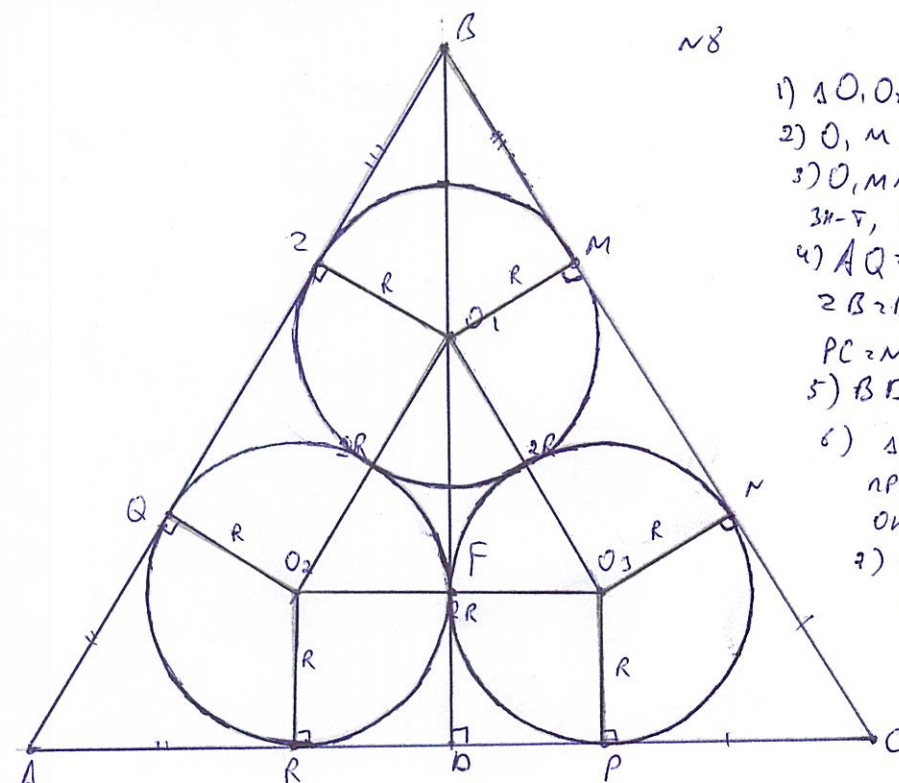
$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}\pi + 2\pi b, b \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{1}{3}\pi + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \\ y = \frac{2}{3}\pi + 2\pi b, b \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{2}{3}\pi + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}\pi + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \\ y = \frac{1}{3}\pi + 2\pi b, b \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{2}{3}\pi + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \\ y = \frac{2}{3}\pi + 2\pi b, b \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{9+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{80}} &= \sqrt[3]{(2+\sqrt{5})^2} + \sqrt[3]{(2-\sqrt{5})^2} = \frac{(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}})(\sqrt[3]{(2+\sqrt{5})^2} + \sqrt[3]{(2-\sqrt{5})^2} - \sqrt[3]{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})})}{(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}})} + 1 \\ &= \frac{2+\sqrt{5}+2-\sqrt{5} + \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}}{(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}})} = \frac{4 + \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}}{\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}} = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} + 1 \end{aligned}$$

№8



10)  $\triangle O_1MB$  - прямоугол.  $O_1M \perp BM$

$$\frac{O_1M}{O_1B} = \sin \angle OBM = \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \quad O_1B = 2R; BM = NC = \sqrt{3}R$$

11)  $AC = BC = AB = 2\sqrt{3}R + 2R$

12)  $O_1F \perp O_2O_3; O_1F = \sqrt{4R^2 - R^2} = \sqrt{3}R$

13)  $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot AC = \frac{1}{2} (BO_1 + O_1F + FO_3) \cdot (2\sqrt{3}R + 2R) = \frac{1}{2} (3R + \sqrt{3}R) 2R(\sqrt{3} + 1) = R^2 (3\sqrt{3} + 3 + 3 + \sqrt{3}) = (6 + 4\sqrt{3})R^2$

14)  $(6 + 4\sqrt{3})R^2 = 4\sqrt{3} + 6$

$$R^2 = 1$$

$$R = 1$$

$$\sqrt{3}R = R = 1$$

1)  $\triangle O_1O_2O_3$  - P/c, так  $O_1O_2 = O_2O_3 = O_3O_1 = 2R$

2)  $O_1M \perp BC; O_3N \perp BC$

3)  $O_1MNO_3$  - прямоугольник,  $O_1O_3 = MN = 2R$ , так-т,  $RP = QZ = MN = 2R$

4)  $AQ = AR$ , как касат, провед из T-ки  $2B = BM$ , как касат, провед из T-ки  $PC = NC$ , как касат, провед из T-ки

5)  $BD \perp AC; O_1 \in BD$

6)  $\triangle BOC = \triangle AOB$ , так они оба прямоуголн и в них можно вписать окр-ти с равными радиусами.

7)  $\triangle ABC \sim \triangle O_1O_2O_3$ , так  $\angle O_1O_3O_2 = \angle BCA$ ,  $O_1O_3 \parallel BC; O_2O_3 \parallel AC$ ,  $AB \parallel O_2O_1$

8) так-т,  $\triangle ABC$  - P/c;  $AB = BC = AC$ ,  $\angle ABC = 60^\circ$

9)  $BD$  - медиана и высота и бис-са в  $\triangle ABC$ , так-т,  $\angle OBM = \frac{1}{2} \angle ABC = 30^\circ$