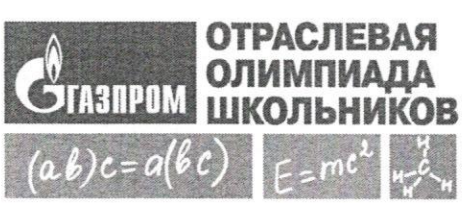
ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$



ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

ШИФР 3657.

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

Дисциплина	М	А	Т	Е	М	А	Т	И	К	А										

Фамилия	А	Л	Ё	Ш	И	Н														
Имя	Н	И	К	И	Т	А														
Отчество	А	Л	Е	К	С	А	Н	Д	Р	О	В	И	Ч							

№ школы	Л	И	Ц	Е	Й		1													
Населенный пункт	Н	Е	Ф	Т	Е	К	А	М	С	К										

Номер варианта			6	

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 3657.

Класс 11 **Вариант** _____ **Дата Олимпиады** 11.02.2017

Площадка написания УГНТУ

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	5	3	5	10	10	10	0	15	20	83	восемьдесят три	

(1) $(x^2+2x+2)(x^2+2x-2)=5$

$(x^2+2x)^2-4=5$

$(x^2+2x)^2=9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+2x=3, \ (1) \\ x^2+2x=-3. \ (2) \end{array}\right.$

Решим уравнение (1):

$x^2+2x-3=0$

$D=4+12=16; \ \sqrt{D}=4;$

$x_1=\frac{-2-4}{2}=-3; \ x_2=\frac{-2+4}{2}=1.$

Решим уравнение (2):

$x^2+2x+3=0$

$D=4-12=-8; \ \sqrt{D}$ $D<0$

$x \in \varnothing.$

Вернемся к системе:

$\left[\begin{array}{l} x=-3, \\ x=1. \end{array}\right.$

Ответ: $x \in \{-3; 1\}.$

(2) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}=2\sqrt{x}$

ОДЗ: $\begin{cases} 2x+1 \geq 0, \\ x-3 \geq 0, \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2}, \\ x \geq 3, \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 3.$

$2x+1+x-3+2\sqrt{(2x+1)(x-3)}=4x$

$2\sqrt{(2x+1)(x-3)}=x+2$

$4(2x+1)(x-3)=x^2+4x+4$

$(8x+4)(x-3)=x^2+4x+4$

$8x-24x+4x-12=x^2+4x+4$

$7x^2-24x-16=0$

$D=576+448=1024; \ \sqrt{D}=32.$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 3657.

$x_1 = \frac{24-32}{14} = -\frac{8}{14} = -\frac{4}{7}.$

$x_2 = \frac{24+32}{14} = \frac{56}{14} = 4.$

Т.к. по ОДЗ $x \geq 3$, то $x = 4$.

Ответ: $x = 4$.

3. $\frac{x^2-2}{x^2-1} < -2$

$\frac{x^2-2}{x^2-1} + 2 < 0$

$\frac{x^2-2+2x^2-2}{x^2-1} < 0$

$\frac{3x^2-4}{x^2-1} < 0$

$\frac{x^2-\frac{4}{3}}{x^2-1} < 0$

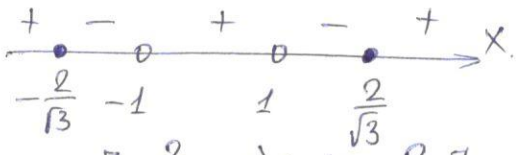
$\frac{\left(x-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(x+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)}{(x-1)(x+1)} < 0$

$\frac{2}{\sqrt{3}} \vee 1$

$2 \vee \sqrt{3}$

$4 > 3$

$\frac{2}{\sqrt{3}} > 1$



$x \in \left[-\frac{2}{\sqrt{3}}; -1\right) \cup \left(1; \frac{2}{\sqrt{3}}\right].$

Ответ: $x \in \left[-\frac{2\sqrt{3}}{3}; -1\right) \cup \left(1; \frac{2\sqrt{3}}{3}\right].$ ±

4. $\log_4(2x+3) + \log_4(x-1) = 2 - \log_4\left(\frac{16}{3}\right)$

$\log_4(2x+3)(x-1) = 2 - (\log_4 16 - \log_4 3)$

$\log_4(2x+3)(x-1) = 2 - 2 + \log_4 3$

$\log_4(2x+3)(x-1) - \log_4 3 = 0.$

$\log_4 \frac{(2x+3)(x-1)}{3} = 0$

$\frac{(2x+3)(x-1)}{3} = 1. \quad / \cdot 3$

ОДЗ: $\begin{cases} 2x+3>0, \\ x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{3}{2}, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1.$

$2x^2 - 2x + 3x - 3 - 3 = 0$

$2x^2 + x - 6 = 0$

$D = 1 + 48 = 49, \sqrt{D} = 7;$

$x_1 = \frac{-1-7}{4} = -2$

$x_2 = \frac{-1+7}{4} = \frac{3}{2}.$

Т.к. по ОДЗ $x \geq 1$, то $x = \frac{3}{2}$.

Ответ: $x = \frac{3}{2}$.

$2x^2-2x+3x-3-3=0$

$2x^2+x-6=0$

$D=1+48=49;\ \sqrt{D}=7;$

$x_1=\frac{-1-7}{4}=-2$

$x_2=\frac{-1+7}{4}=\frac{3}{2}.$

Т.к. по ОДЗ $x>1$, то $x=\frac{3}{2}$.

Ответ: $x=1{,}5$.

⑤ $4^x>4-3\cdot 2^x$

Пусть $2^x=t$, тогда:

$t^2>4-2t$

$t^2+2t-4>0$

$D=4+$

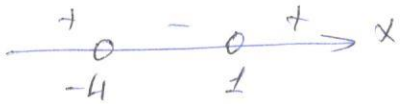
$t^2>4-3t$

$t^2+3t-4>0$

$D=9+16=25;\ \sqrt{D}=5;$

$t_1=\frac{-3-5}{2}=-4;\ t_2=\frac{-3+5}{2}=1.$

$(t-1)(t+4)>0$



$\left[\begin{array}{l} t<-4, \\ t>1 \end{array}\right.$

Вернемся к замене:

$\left[\begin{array}{l} 2^x<-4, \\ 2^x>1 \end{array}\right. \Leftarrow\!= \left[\begin{array}{l} x\in\varnothing, \\ 2^x>2^0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x>0.$

Ответ: $x>0$.

⑥ Известно, что факультет по плану принимает абитуриентов по специальностям A, B и C в отношении 4:3:6. Пусть x – одна часть, тогда абитуриентов на специальность A по плану – 4x, на специальность B – 3x, на специальность C – 6x. Тогда всего по плану принято 4x + 3x + 6x = 13x абитуриентов. Однако в действительности на специальность A было принято на 4 человека больше, т.е. (4x+4) абитуриентов, на специальность B – на 5 человек больше, т.е. (3x+5), на специальность C – на 6 челове-

век больше, т.е. $(6x+6)$. Таким образом, по факту было принято $4x+4+3x+5+6x+6=13x+15$ абитуриентов.

Т.к. известно, что план приема был превышен на $7\frac{9}{13}\%$, то составим и решим уравнение:

$$15 = 7\frac{9}{13} : 100 \cdot 13x$$

$$15 = \frac{100 \cdot 13x}{13 \cdot 100}$$

$$x = 15$$

Значит, на специальность A было принято $4x+4 = 4\cdot 15+4 = 64$ человека, на специальность B — $3x+5 = 3\cdot 15+5 = 50$ человек, на специальность C — $6x+6 = 6\cdot 15+6 = 96$ человек.

Ответ: на специальности A, B и C соответственно были приняты ~~64~~ 64 человека, 50 человек и 96 человек.

(7) Дано: b_n - геометрическая прогрессия, $b_1 = 1$, $b_5+b_9 = 6$.

Найти: S_{13}.

Решение:

$b_5+b_9 = b_1q^4 + b_1q^8 = q^4+q^8$ (т.к. $b_1=1$), т.е.:

$q^4+q^8 = 6$

Пусть $q^4 = t$, тогда:

$t^2+t-6=0$

$D = 1+24 = 25$; $\sqrt{D} = 5$;

$t_1 = \frac{-1-5}{2} = -3$; $t_2 = \frac{-1+5}{2} = 2$.

Вернемся к замене: 1) $q^4 = -3$, $q \in \varnothing$; 2) $q^4 = 2$, $q = \pm\sqrt[4]{2}$.

Значит, $q = \pm\sqrt[4]{2}$.

$$S_{13} = \frac{b_1(1-q^{13})}{1-q}, \Rightarrow \left[\begin{array}{l} S_{13} = \dfrac{1-2^{\frac{13}{4}}}{1-2^{\frac{1}{4}}}, \\ S_{13} = \dfrac{1+2^{\frac{13}{4}}}{1+2^{\frac{1}{4}}}. \end{array}\right.$$

+

Значит, $S_{13} = \frac{1 \pm 2\frac{13}{4}}{1 \pm 2\frac{1}{4}}$.

Ответ: $S_{13} = \frac{1 \pm 2\frac{13}{4}}{1 \pm 2\frac{1}{4}}$.

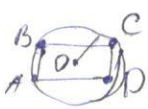
(8) Дано: окр(O, 10см), ABCD - вписанный прямоугольник, $S_{\square} = \frac{1}{2} S_{\odot}$.

Найти: a и b (где a и b - стороны прямоугольника).

Решение:

$S_{\odot} = \pi R^2 = 100\pi$ см^2

$S_{\square} = \frac{1}{2} S_{\odot} = 50\pi$ см^2



$S_{\square} = ab = 50\pi$

Значит, при $a = n$, где $n > 0$, $b = \frac{50\pi}{n}$, т.е:

$\begin{cases} a = n, \\ b = \frac{50\pi}{n}, \end{cases}$ где a и b - стороны прямоугольника, и $n > 0$.

Ответ: $n^{(см)}$ и $\frac{50\pi}{n}^{(см)}$, где $n > 0$.

(9) $\begin{cases} \sin x + \cos y = \frac{1-\sqrt{3}}{2}, \\ \sin x \cdot \cos y = -\frac{\sqrt{3}}{4}. \end{cases}$

Пусть $\sin x = t$, $\cos y = q$, тогда система примет вид:

$\begin{cases} t + q = \frac{1-\sqrt{3}}{2}, \\ t \cdot q = -\frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1-\sqrt{3}}{2} - q, \\ \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2} - q\right) q = -\frac{\sqrt{3}}{4}. \quad (*) \end{cases}$

Решим уравнение (*):

$\frac{(1-\sqrt{3}-2q)q}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{4} \quad | \cdot 4$

$2q - 2\sqrt{3}q - 4q^2 = -\sqrt{3}$

$4q^2 + 2\sqrt{3}q - 2 - \sqrt{3} = 0$

$4q^2 + (2\sqrt{3} - 2)q - \sqrt{3} = 0$

$D = 12 + 4 - 8\sqrt{3} + 16\sqrt{3} = 12 + 4 + 8\sqrt{3} = (2\sqrt{3} - 2)^2$; $\sqrt{D} = 2\sqrt{3} + 2$.

$q_1 = \frac{-2\sqrt{3} + 2 + 2\sqrt{3} + 2}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$; $q_2 = \frac{-2\sqrt{3} + 2 + 2\sqrt{3} - 2}{8} = -\frac{4\sqrt{3}}{8} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Вернемся к системе:

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 8657.

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} q=\frac{1}{2}, \\ q=-\frac{\sqrt{3}}{2}, \end{array}\right. \\ t=\frac{1-\sqrt{3}}{2}-q \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} q=\frac{1}{2}, \\ t=\frac{1-\sqrt{3}-1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} q=-\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ t=\frac{1-\sqrt{3}+\sqrt{3}}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} q=\frac{1}{2}, \\ t=-\frac{\sqrt{3}}{2}, \end{cases} \\ \begin{cases} q=-\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ t=\frac{1}{2}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Вернемся к исходным:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \cos y=\frac{1}{2}, \\ \sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \cos y=-\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \sin x=\frac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n, \\ \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{3}+2\pi k, \\ x=-\frac{2\pi}{3}+2\pi k, \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} y=\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi n, \\ \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}+2\pi k, \\ x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k, \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \quad \text{где } n\in Z, \; k\in Z.$$

Ответ: $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi k;\ \frac{\pi}{3}+2\pi n\right), \left(-\frac{\pi}{3}+2\pi k;\ -\frac{\pi}{3}+2\pi n\right),$
$\left(-\frac{2\pi}{3}+2\pi k;\ \frac{\pi}{3}+2\pi n\right), \left(-\frac{2\pi}{3}+2\pi k;\ -\frac{\pi}{3}+2\pi n\right),$
$\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi n\right), \left(\frac{\pi}{6}+2\pi k;\ -\frac{5\pi}{6}+2\pi n\right),$
$\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi k;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi n\right), \left(\frac{5\pi}{6}+2\pi k;\ -\frac{5\pi}{6}+2\pi n\right)$, где $n\in Z, k\in Z$.

(10) $\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}+\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}$

$\sqrt{392}=\sqrt{4\cdot 2\cdot 49}=2\cdot 7\sqrt{2}=14\sqrt{2}$

$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$

$(2+\sqrt{2})^3=8+3\cdot 4\cdot\sqrt{2}+3\cdot 2\cdot 2+2\sqrt{2}=20+14\sqrt{2}$,
$(2-\sqrt{2})^3=8-3\cdot 4\sqrt{2}+3\cdot 2\cdot 2-2\sqrt{2}=20-14\sqrt{2}$

$\sqrt[3]{(2+\sqrt{2})^3}+\sqrt[3]{(2-\sqrt{2})^3}=2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}=4.$

Ответ: 4.