

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

ШИФР

12412

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

[illegible]

Фамилия	А	Р	С	Л	А	Н	О	В	А										
	А	Л	И	Н	А														
Имя	А	Р	С	Л	А	Н	О	В	А										
Отчество	Р	У	С	Т	Я	М	О	В	Н	А									

[illegible]

Номер варианта	0	0	6
----------------	---	---	---

ШИФР

12412

Класс 11

Вариант 6

Дата Олимпиады 11.02.2017

Площадка написания УГНТУ

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	50	—	50	50	100	100	—	100	150	200	800	восемьсот	Ташев

1.1.

$$(x^2+2x+2)(x^2+2x-2)=5, \text{ сделаем замену } x^2+2x=t.$$

$$(t+2)(t-2)=5$$

$$t^2-4=5$$

$$t^2=9$$

$$t=\pm 3$$

$$\begin{cases} x^2+2x=3 \\ x^2+2x=-3 \end{cases} \begin{cases} x^2+2x-3=0 \\ x^2+2x+3=0 \end{cases} \begin{cases} x=1 \\ x=-3 \end{cases}$$

+50

$$x^2+2x+3=0$$

$$D=4-4\cdot 3=-8, D<0 \text{ - действительных корней нет}$$

Ответ: -3, 1.

$$\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-3} = 2\sqrt{x} \quad DDZ: \begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ x-3 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x \geq 3 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad x \geq 3 \quad x \in [3; +\infty).$$

⊖

$$\sqrt{2\cdot 4+1} + \sqrt{4-3} = 2\sqrt{4}$$

$$3+1=4 \text{ - верно.}$$

Пот корень единственный, т.к. $f(x)=\sqrt{2x+1}$ - монотонно возрастающая ф-я, $g(x)=\sqrt{x-3}$ - монотонно возрастающая функция, сумма двух монотонно возрастающих функций также будет монотонно возрастающей функцией на области определения. $\varphi(x)=2\sqrt{x}$ - монотонно возрастает на $x \in [3; +\infty)$, Получим что справа и слева две монотонно возрастающих функции, значит они могут пересечься только один раз. Ответ: $x=4$.

почему?

№3

$$\frac{x^2-2}{x^2-1} \leq -2. \quad \text{ОДЗ: } x \neq \pm 1.$$

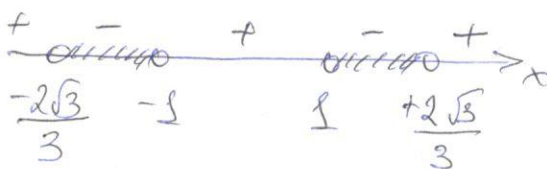
$$\frac{x^2-2}{x^2-1} + 2 \leq 0$$

$$\frac{x^2-2+2x^2-2}{x^2-1} \leq 0$$

$$\frac{3x^2-4}{x^2-1} \leq 0$$

$$\frac{(\sqrt{3}x-2)(\sqrt{3}x+2)}{(x-1)(x+1)} \leq 0$$

метод интервалов:



Ответ. $(-\frac{2\sqrt{3}}{3}; -1) \cup (1; \frac{2\sqrt{3}}{3})$.

+58.

№4

$$\log_4(2x+3) + \log_4(x-1) = 2 - \log_4\left(\frac{16}{3}\right)$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} 2x+3 > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -\frac{3}{2} \\ x > 1 \end{cases} \Rightarrow x > 1.$$

$$\log_4(2x+3)(x-1) = \log_4 4^2 - \log_4\left(\frac{16}{3}\right)$$

$$\log_4(2x+3)(x-1) = \log_4\left(\frac{16 \cdot 3}{16}\right)$$

$$(2x+3)(x-1) = 3.$$

$$2x^2 - 2x + 3x - 3 = 3$$

$$2x^2 + x - 6 = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 6 \cdot 2 = 49$$

$$x = \frac{-1 \pm 7}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$x = \frac{-1-7}{4} = -\frac{8}{4} = -2 - \text{не подходит}$$

Ответ. $\frac{3}{2}$

+58

15.

1) $4^x > 4 - 3 \cdot 2^x$, сделаем замену $2^x = t, t > 0$.

$t > 4 - 3 \cdot 2^x$

2) $\begin{cases} t^2 > 4 - 3t \\ t > 0 \end{cases} \Rightarrow t^2 + 3t - 4 > 0$

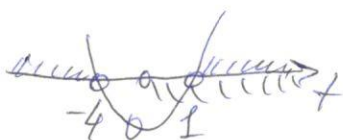
~~$t^2 + 3t - 4 > 0$~~

$t^2 + 3t - 4 > 0$

$D = 9 + 4 \cdot 4 = 25$

$t = \frac{-3 \pm 5}{2} \geq 1$

$t = \frac{-3 - 5}{2} = -4$



3) $\begin{cases} t > 1 \\ 2^x > 1 \\ 2^x > 2^0 \\ x > 0 \end{cases}$

+100

Ответ. $x \in (0; +\infty)$.

16
Пусть коэффициент пропорциональности x . Тогда на специальность А планируют принять $4x$, на В — $3x$, С — $6x$. В действительности на специальность А приняли $4x+4$, В — $3x+5$, С — $6x+6$. По плану абитуриентов было $4x+3x+6x=13x$, в действительности же $4x+4+3x+5+6x+6=13x+15$. План был превышен на $13x+15-13x=15$ или можно было задать $\frac{100}{13}\%$. Составим уравнение: $\frac{15}{13x} = \frac{100}{13 \cdot 100\%}$.

$x = 15$.

На специальность А: $4 \cdot 15 + 4 = 64$

В: $3 \cdot 15 + 5 = 50$

С: $6 \cdot 15 + 6 = 96$

+100

Ответ. На специальность А приняли 64 человека, на специальность В — 50 человек, на специальность С — 96 людей.

17.

1) a_n — член арифметической прогрессии. $a_n = a_1 + (n-1)d$, $a_1 = 1$,
 $a_n = 1 + (n-1)d$.

$$a_5 + a_9 = 6.$$

$$1 + (5-1)d + 1 + (9-1)d = 6$$

$$2 + 4d + 8d = 6$$

$$2 + 12d = 6$$

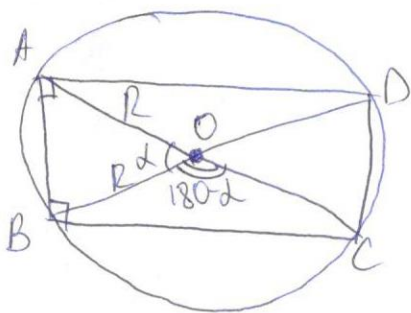
$$12d = 4$$

$$d = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$2) S_{13} = \frac{a_1 + a_{13}}{2} \cdot 13 = \frac{1 + 1 + (13-1)d}{2} \cdot 13 = \frac{2 + 12d}{2} \cdot 13 = \frac{2 + 12 \cdot \frac{1}{3}}{2} \cdot 13 = \frac{6}{2} \cdot 13 = 39.$$

Ответ. 39.

18



Дано: ABCD — прямоугольник, ~~AB=10~~

$$R = 10 \text{ см}, S_{ABCD} = \frac{1}{2}$$

Найти: AB, BC — длина

Решение: 1) Т.к. $\angle ABC = 90^\circ$ и центральный угол в два раза больше вписанного, то центральный угол будет равен 180° , значит центр окружности лежит на точке пересечения диагоналей прямоугольника.

2) Пусть угол AOB = α , $\alpha < 90^\circ$. по теореме косинусов: $AB^2 = R^2 + R^2 - 2R \cdot R \cos \alpha$.

$$AB^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos \alpha, BC^2 = R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cdot \cos(180^\circ - \alpha) = 2R^2 + 2R^2 \cos \alpha.$$

$$BC^2 = 2R^2 + 2R^2 \cos \alpha, S_{ABCD} = AB \cdot BC = R \sqrt{2-2\cos \alpha} \cdot R \sqrt{2+2\cos \alpha} = R^2 \sqrt{4-4\cos^2 \alpha}.$$

$$S_{\text{круга}} = \pi \cdot R^2$$

$$2S_{ABCD} = S_{\text{круга}} \\ 2R^2 \sqrt{4-4\cos^2 \alpha} = \pi R^2$$

$$4-4\cos^2 \alpha = \frac{\pi^2}{4} \\ -4\cos^2 \alpha = \frac{\pi^2}{4} - 4$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{\pi^2 + 16}{16}$$

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{\pi^2 + 16}{16}}, \text{ т.к. мы предполагаем, что } \alpha < 90^\circ \text{ } \cos \alpha > 0 \text{ } \cos \alpha = \sqrt{\frac{\pi^2 + 16}{16}}.$$

$$AB = 10 \sqrt{2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{\pi^2 + 16}}{4}} = 10 \sqrt{2 - \frac{\sqrt{\pi^2 + 16}}{2}}, BC = 10 \sqrt{2 + \frac{\sqrt{\pi^2 + 16}}{2}}, \text{ при } \alpha > 90^\circ \text{ аналогично, значения AB и BC меняются местами.}$$

$$\text{Ответ. } 10 \sqrt{2 - \frac{\sqrt{\pi^2 + 16}}{2}}; 10 \sqrt{2 + \frac{\sqrt{\pi^2 + 16}}{2}}$$

№9

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ \sin x \cdot \cos y = -\frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases} \quad \text{Сделаем замену } \begin{cases} \sin x = a, a \in [-1; 1] \\ \cos y = b, b \in [-1; 1] \end{cases}$$

$$-\sqrt{3} + 4b^2 = (1-\sqrt{3})2b$$

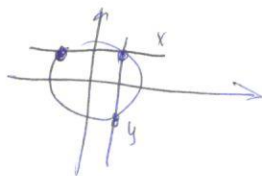
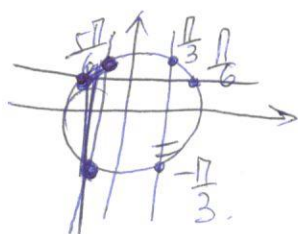
$$4b^2 - (1-\sqrt{3})2b + \sqrt{3} = 0$$

$$4b^2 + (2\sqrt{3}-2)b - \sqrt{3} = 0$$

$$D = 4(3-2\sqrt{3}+1) + 16\sqrt{3} = 4(\sqrt{3}+1)^2$$

$$b = \frac{-2\sqrt{3}+2+2\sqrt{3}+2}{8} = \frac{1}{2} \quad a = \frac{-\sqrt{3} \cdot 2}{4 \cdot 1} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$b = \frac{-2\sqrt{3}+2-2\sqrt{3}-2}{8} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad a = \frac{-\sqrt{3} \cdot 2}{4 \cdot (-\sqrt{3})} = \frac{1}{2}$$



Ответ: ~~124.12~~

$$\begin{cases} x = \left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \right] \\ y = \left[\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \right] \\ x = \left[\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \right] \\ y = \left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \right] \end{cases}$$

+ 150

№10.

$$\sqrt[3]{20+\sqrt{392}} + \sqrt[3]{20-\sqrt{392}} = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} = \sqrt[3]{8+3 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 4\sqrt{2} + 2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{8+3 \cdot 2 \cdot 2 - 3 \cdot 4\sqrt{2} - 2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{(2+\sqrt{2})^3} + \sqrt[3]{(2-\sqrt{2})^3} = 2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2} = 4$$

Ответ: 4.

+ 200