ГАЗПРОМ

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

ШИФР 10495

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

Дисциплина	МАТЕМАТИКА
Фамилия	БАТМАНОВ
Имя	ИГОРЬ
Отчество	АРТЁМОВИЧ
№ школы	ЛИЦЕЙ 83
Населенный пункт	УФА
Номер варианта	5

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 10495

Класс 11 Вариант 5 Дата Олимпиады 11.02.2017

Площадка написания УГНТУ

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	5	5	5	5	10	10	10	20	10	0	80	восемьдесят	[illegible]

Задача №1

$(x+1)(x+3)(x+5) = x(x^2-9) \Leftrightarrow x^3+(1+3+5)x^2+(1\cdot3+3\cdot5+1\cdot5)x+1\cdot3\cdot5 =$

$= x^3-9x \Leftrightarrow x^3+9x^2+23x+15 = x^3-9x \Leftrightarrow 9x^2+32x+15=0$

$x=-3$: корень, т.к. $9\cdot9+32\cdot(-3)+15 = 81+15-96=0$.

Тогда по теореме Виета: $\frac{15}{9}:(-3) = -\frac{5}{9}$ является корнем.

Ответ: -3; $-\frac{5}{9}$.

+

Задача №2 решение задачи №2 см. далее

~~$\sqrt{22-x} - \sqrt{10-x} = 2$. Из условия следует, что~~

~~$10-x \geq 0$; $22-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 10$.~~

~~$\Rightarrow \sqrt{22-x} - \sqrt{10-x} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 10 \\ 22-x+(10-x)-2\sqrt{22-x}\sqrt{10-x} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$~~

~~$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 10 \\ 16-x-2 = \sqrt{22-x}\sqrt{10-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 10 \\ 196+x^2-28x = 220+x^2-32x \end{cases}$~~

~~(разделим на два и перенесём ~~члены~~ (изменение алгебр. суммы)~~

~~$\Updownarrow$~~

~~$\begin{cases} x \leq 10 \\ 4x = 24 \end{cases} \Leftrightarrow x = 6$~~

~~во время возведения в квадрат мы могли приобрести лишние корни, но $\sqrt{16} - \sqrt{4} = 2$.~~

~~Ответ: 6.~~

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 10495

Задача N3

$\frac{x^2+2}{x^2-1} < -2$, Из условия: $x^2-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$, $x \neq -1$

есть два случая: I $x^2-1>0$ $\Updownarrow$

$\frac{x^2+2}{x^2-1}<-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty;-1) \cup (1;+\infty) \\ x^2+2 < -2(x^2-1) \end{cases}$

$x^2 \geq 0$; $2>0 \Rightarrow x^2+2>0$.

$(x^2-1)>0 \Rightarrow -2\cdot(x^2-1)<0$

т. е. $0 < x^2+2 < -2(x^2-1) < 0$.

противоречие

II $\frac{x^2+2}{x^2-1}<-2 \Leftrightarrow$ $x^2-1<0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-1;1) \\ x^2+2 > -2(x^2-1) \end{cases}$

$\Downarrow$

$3x^2>0$

$x^2>0$, т. е.

$x \in (-1;0) \cup (0;1)$

+

Ответ: $(-1;0) \cup (0;1)$

Задача N4

$\lg(x-13) + 3\lg 2 = \lg(3x+1)$, Из условия:

$\begin{cases} x-13>0 \\ 3x+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>13 \\ x>-\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x>13$.

$\lg(x-13) + 3\lg 2 = \lg(x-13) + \lg 8 = \lg 8(x-13)$.

$\Leftrightarrow \lg(x-13) + 3\lg 2 = \lg(3x+1) \Leftrightarrow \lg(8(x-13)) = \lg(3x+1)$.

т.к. ~~lg - функция возрастающая~~ т.к. $x>13$;

$\lg(8(x-13)) = \lg(3x+1) \Leftrightarrow 8(x-13) = 3x+1 \Leftrightarrow 5x = 105 \Leftrightarrow x = 21$.

$\lg 8 + 3\lg 2 = \lg(64) \Leftrightarrow 6\lg 2 = 6\lg 2 \Leftrightarrow 0=0$. Ответ: 21

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 10495

Задача №5

$5^{2x+1} > 5^x+4$. введем замену $5^x=t$.

$5\cdot t^2 > t+4 \Leftrightarrow 5t^2-t-4>0$.

$f(t)=5t^2-t-4$ - парабола, коэф при t^2 - положительный,

$t=1$; $(5-1-4=0)$ корень $\Rightarrow$

$t=-\frac{4}{5}$ корень по теореме Виета $\Rightarrow$

при $t\in(-\infty;-\frac{4}{5})\cup(1;+\infty)$ $5t^2-t-4>0$.

Сделаем обратную замену, при $5^x\in(-\infty;-\frac{4}{5})\cup(1;+\infty)$

$5^{2x+1}>5^x+4$. при этом $5^x\in(0;+\infty)\ \forall x$.

$\Rightarrow$ при $5^x\in(1;+\infty)$ $5^{2x+1}>5^x+4$.

Т.к. 5^x - функция возрастающая, и т.к. при $x=0$, $5^x=1$, $x\in(0;+\infty)$

(+)

Ответ: $(0;+\infty)$

Задача №6

Пусть x человек живет в I корпусе. Тогда $(x-4)$ человек живет во втором корпусе и $(x+3)$ человек в III корпусе т.к. всего 119 человек составим уравнение:

$x+(x-4)+(x+3)=119 \Leftrightarrow 3x=120 \Rightarrow x=40$

Ответ: $\overset{I}{40}; \overset{II}{36}; \overset{III}{43}$ человек соответственно в I, II, III корпусе.

(7)

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 10495

Задача №7

$\sqrt{22-x}-\sqrt{10-x}=2.$ Из условия следует, что

$10-x\geq 0;\ 22-x\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 10$

$\sqrt{22-x}=2+\sqrt{10-x}.$ т.к. $\sqrt{10-x}\geq 0$, и $2>0$, то

$\begin{cases} x\leq 10 \\ \sqrt{22-x}=2+\sqrt{10-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 10 \\ 22-x=4+2\cdot 2\sqrt{10-x}+10-x \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 10 \\ 2=\sqrt{10-x} \end{cases}$, т.к. $2>0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 10 \\ 4=10-x \end{cases} \Leftrightarrow x=6.$

Проверка: $\sqrt{16}-\sqrt{4}=4-2=2.$ (+)

Ответ: 6.

Задача №10

Пусть $\begin{cases} 9+\sqrt{80}=(a+b)^3 \\ 9-\sqrt{80}=(a-b)^3 \end{cases}$ Тогда

$\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}=2a.$ $2\cdot\sqrt[3]{\frac{9}{4}}$

$\sqrt[3]{\frac{9}{4}}$ 4^a ~~$\frac{27}{4}$~~ ~~$3\frac{9}{4}$~~

$b=\sqrt{\dfrac{\frac{27}{4}}{3\sqrt[3]{\frac{9}{4}}}}$

Тогда $\begin{cases} 2\cdot 9=2\cdot a^3+2\cdot 3\cdot ab^2 \\ 2\cdot\sqrt{80}=2\cdot b^3+2\cdot 3\cdot a^2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2=\dfrac{9-a^3}{3a} \\ b\,\dfrac{9-a^3+9a^3}{3a}=\sqrt{80} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\dfrac{9-a^3}{3a}\dfrac{(9+8a^3)^2}{9a^2}=80 \Leftrightarrow$ замена $a^3=t$ $\dfrac{(9-t)(9+8t)^2}{27t}=80 \Leftrightarrow$

$-64t^3-9\cdot 16t^2-81t+729+64\cdot 9t^2+9\cdot 9\cdot 8\cdot 2\cdot t=80\cdot 27t \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 64t^3-9\cdot 48t^2+81t+80\cdot 27t-81\cdot 16t-729=0$ $-81\cdot 15t$

$64t^3-9\cdot 48t^2-27\cdot 5(9-16)t-729=0 \Leftrightarrow$

~~$64t^3-9\cdot 48t^2+27\cdot 5\cdot 7t-729=0$~~

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 10495

Задача №7

Пусть b_0 - первый член, а q - знаменатель искомой геом. прогрессии.

Тогда, по формуле суммы элементов бесконечно убывающей геом прогрессии:

$$\frac{b_0}{1-q}=3.$$

Заметим, что квадраты членов тоже образуют геом (с первым членом b_0^2 и знаменателем q^2) прогрессию, также бесконечно убывающую, т.к. по определению: $0<q<1$, ~~⇒~~ $q<1$

$\Rightarrow 0<q^2<1.$

Тогда сумма ее членов = сумме квадратов членов 1-й геом прогрессии $=\frac{b_0^2}{1-q^2}=4{,}5.$

Условия на q сохраняются

Тогда $\begin{cases}\frac{b_0}{1-q}=3\\ \frac{b_0}{1-q}\cdot\frac{b_0}{1+q}=4{,}5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b_0=3-3q\\ \frac{b_0}{1+q}=1{,}5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b_0=3-3q\\ b_0=1{,}5+1{,}5q\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}q=\frac{1}{3}\\ b_0=2\end{cases}$

Ответ: $\{2;\ 2\cdot\frac{1}{3};\ 2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2;\ \dots\}$.

+

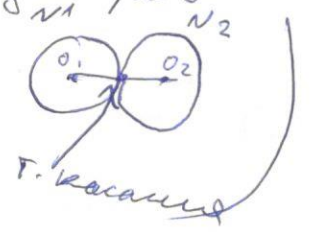
Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 10495

Задача №8 начало. В решении R то же самое что и r.

Т.к. пиццы касаются, не перекрываясь, то их точки касания лежат на линии центров

(Пояснение пицца_1 кас. пиц._2:

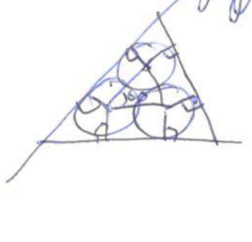


Тогда пусть радиус пиццы равен R. Тогда

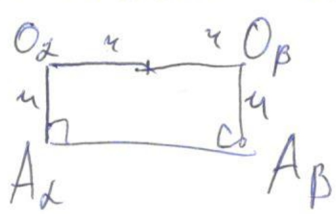
Пусть их центры $O_1; O_2; O_3$: Тогда $\triangle O_1O_2O_3$ — равносторонний, со стороной 2R.

Тогда утверждение: площадь коробки минимальна, если каждая пицца касается двух сторон этой коробки

Это утверждение докажем позже, а пока решение по модулю этого утверждения:



I-е. рассмотрим сторону коробки с точками касания A_α и A_β для граничных окр кругов (пицц) с центрами в O_α и O_β.



Тогда $\triangle A_\alpha O_\alpha A_\beta = \triangle A_\beta O_\beta A_\alpha$ по двум катетам (r и $A_\alpha A_\beta$)

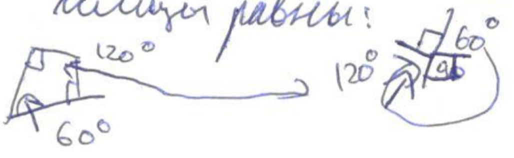
$\Rightarrow A_\alpha O_\beta = O_\alpha A_\beta \Rightarrow \triangle O_\alpha O_\beta A_\beta = \triangle O_\beta O_\alpha A_\alpha$

по трем сторонам тогда $\angle A_\alpha O_\alpha O_\beta = \angle O_\alpha O_\beta A_\beta = \frac{360^\circ - 180^\circ}{2} = 90^\circ$

Тогда уголки, в которые „вписаны" пиццы равны:

60°

см. далее



ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

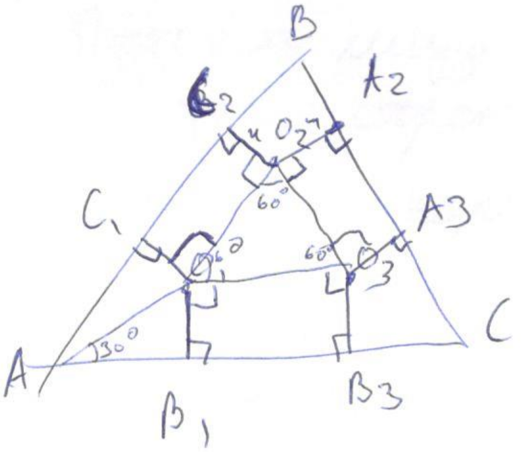
$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 10495

Задача N8 конец: $\boxed{\text{док-во леммы(утв) далее}}$

Докажем то же самое, но более строго



$\angle C_1O_1B_1 = \angle C_2O_2A_2 = \angle A_3O_3B_3 =$

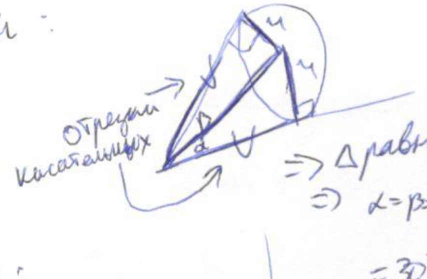
$= 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

$\Rightarrow \angle A = \angle B = \angle C = 360^\circ - 120^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 60^\circ.$

Т.е. ΔABC тоже равносторонний.

S равностор Δ со стороной a равна:

$$\frac{\sqrt{3}a^2}{4},$$



$\Rightarrow \Delta$ равны $\Rightarrow \alpha = \beta = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$

длина стороны ΔABC через r равна:

Т.к. r вписаны в углы по 60° отрезки

$AB_1 = CB_3 = CA_3 = A_2B = BC_2 = C_1A =$

$= \frac{r}{tg30} = \sqrt{3}r.$

Тогда $AC = 2\sqrt{3}r + B_1B_3$. Т.к. $B_1B_3O_3O_1$; $O_1O_2C_2C_1$; $A_2A_3O_3O_2$ –

прямоугольники, то; $A_2A_3 = B_1B_3 = C_1C_2 = 2r \Rightarrow$

$a = AC = AB = BC = 2(\sqrt{3}+1)r$. Т.е.

$(4\sqrt{3}+6)$ дм$^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(2\sqrt{3}+2)^2 r^2 \Leftrightarrow$

$\sqrt{\frac{(16+8\sqrt{3})}{(2\sqrt{3}+2)^2}}$ дм $= r \Leftrightarrow r = 1$ дм

Ответ: 1 дм.

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ГАЗПРОМ
$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

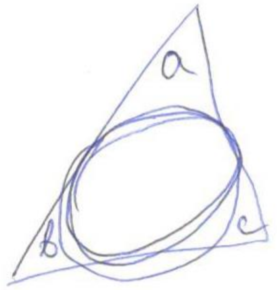
Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 10495

Задача №8

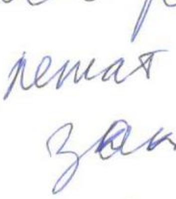
$\boxed{\text{Док-ство леммы}}$:

Пусть есть пицца, которая касается всех трех сторон => гранич. окружность пиццы ≡ впис ω коробки: ~~тогда две другие пиццы лежат в каких~~ то



но в один угол можно вписать не более одной ω с таким радиусом т.е. в каждую из зон a, b, c не влезет еще одна пицца, противоречие (далее радиус вписанной уменьшается сю приближении к ~~угла~~ вершине => уменьш, и макс размер ω, которую можно просто поместить внутрь угла).

Теперь просто рассматриваем три пиццы, которые лежат в коробке. Теперь пытаемся подвинуть прямые, заключающие отрезки коробки в сторону уменьшения (ая-мас), так, чтобы пиццы все еще были внутри: по максимуму, последовательно каждую.



Теперь заметим, что если какая-то пицца касается одной или менее стороны, то ее (пиццу) можно увеличить т.е. упаковка не плотна. Т.к. нас интересует наименьший случай - плотная упаковка, то утв. (Лемма) доказана.

Задача №9

$$\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = \frac{3}{4} \\ tg\, x \cdot tg\, y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \cdot \sin y = \frac{3}{4} \\ \cos x \cdot \cos y = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\cos(x+y) = -\frac{1}{2}$$

$$(2)\ \cos(x-y) = 1 \Rightarrow$$

из (2) если $x = \pi k + t$, $0 \le t < \pi$, то $y = \pi n + t$, $0 \le t < \pi$, $k, n \in \mathbb{Z}$

из (1): $x + y = \pi \pm \frac{1}{3}\pi + 2\pi g$, $g \in \mathbb{Z}$

из (2): $x - y = ?\pi e$, $e \in \mathbb{Z}$.

106

Рассмотрим все 4 случая четностей / нечетностей k и n:

k и n четны

$x+y = 2t + 2\pi\left(\frac{k}{2}+\frac{n}{2}\right)$

т.е. $t = \frac{1}{3}\pi$

$t = \frac{2}{3}\pi$

Проверка:

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4} \\ \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4} \\ \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = 3 \end{cases}$$

$k \vdots 2$; $n \not\vdots 2$

$x+y = 2t + \pi + \left(\frac{k}{2}+\frac{n-1}{2}\right)2\pi$

Тогда $t = \frac{\pi}{6}$.

Проверка

Тогда $\sin x$ и $\sin y$ разных знаков, а они не равны 0 т.к.

$(\sin(2\pi\frac{k}{2}+t) \cdot \sin(2\pi\frac{n-1}{2}+\pi+t)$, $0 < t < \pi$, < 0, т.к. $t \ne 0$.

$k \not\vdots 2$; $n \vdots 2$

$x+y = 2t + \pi + \left(\frac{k-1}{2}+\frac{n}{2}\right)2\pi$

тогда $t = \frac{\pi}{6}$

$\sin x \ne 0$; $\sin y \ne 0$,

$\sin x \cdot \sin y = \frac{3}{4}$,

$\sin(2\pi\frac{k-1}{2}+\pi+t) \cdot \sin(2\pi\frac{n}{2}+t) < 0$ при $0 < t < \pi$.

$k, n \not\vdots 2$

$x+y = 2t + \left(\frac{k-1}{2}+\frac{n-1}{2}+1\right)2\pi$

т.е. $t = \frac{1}{3}\pi$

$t = \frac{2}{3}\pi$.

Проверка:

$$\begin{cases} -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{4} \\ \frac{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\left(-\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(-\frac{1}{2}\right)} = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{4} \\ \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = 3 \end{cases}$$

Ответ: $(2\pi g_1 + \frac{1}{3}\pi; 2\pi g_2 + \frac{1}{3}\pi)$; $(2\pi g_3 + \frac{2}{3}\pi; 2\pi g_4 + \frac{2}{3}\pi)$; $(2\pi g_5 + \frac{4}{3}\pi; 2\pi g_6 + \frac{4}{3}\pi)$; $(2\pi g_7 + \frac{5}{3}\pi; 2\pi g_8 + \frac{5}{3}\pi)$, $g_1, g_2 \ldots g_8 \in \mathbb{Z}$.