ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

ШИФР 14274

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ • ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «УФИМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НЕФТЯНОЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ» • Приемная комиссия

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

Дисциплина: МАТЕМАТИКА

Фамилия: ВАСИЛЬЕВ

Имя: СЕРГЕЙ

Отчество: ВЯЧЕСЛАВОВИЧ

№ школы: 153

Населенный пункт: УФА

Номер варианта: 5

ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа,
обратная сторона не проверяется!

ШИФР 14274

Класс 9 **Вариант** 5. **Дата Олимпиады** 11.02.17

Площадка написания УГНТУ

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	5	5	0	5	—	0	0	15	15	15	60	шестьдесят	

1.

Запишем известные данные в виде таблицы.
x – скорость разгрузки первого крана, y – второго.
$x+y$ – их скорость вместе, соответственно

A, баржи	N, баржи/ч	t, ч
1	x	24 ч.
1	y	48 ч.
1	$x+y$	$\frac{1}{x+y}$.

$A = N \cdot t.$

$x = \frac{1}{24}$ б/ч; $y = \frac{1}{48}$ б/ч. $x+y = \frac{2+1}{48} = \frac{3}{48} = \frac{1}{16}$ б/ч.

$t = \frac{A}{N} = \frac{1}{x+y} = 16$ ч.

+

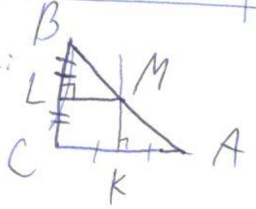
Ответ: 16 ч.

2.

Дано: $R = 3$; $h = 2$.
Найти: $S = ?$

Решение: В прямоугольном треугольнике центр описанной окружности находится на середине гипотенузы. Сейчас докажу.

Чертёж:



Центр описанной окружности – точка пересечения серединных перпендикуляров. Проведём такой для катета AC на чертеже. Он пересечёт гипотенузу AB в точке M. Так как $KM \parallel BC$,

$\frac{AK}{KC} = \frac{AM}{MB}$ по теореме Фалеса $\frac{AK}{KC} = 1 = \frac{AM}{MB} \Rightarrow M$ – середина гипотенузы.

Аналогично для катета BC.

Тогда серед. перпен. обоих катетов пересекают AB в одной и той же точке, значит там пересекаются и сами перпендикуляры. Т.е. середина гипотенузы – центр описанной окружности в прямоуг. треуг.. Как следствие $AB = 2R$.

$S_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot h}{2} = \frac{2R \cdot h}{2} = R \cdot h = 6.$

Ответ: 6.

+

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 14274

3.

$a=0{,}25.$

$\sqrt{a}=0{,}5$

$$\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{-\frac{5}{7}}}{2\cdot a^{\frac{1}{7}}}\right)^{-7}=\left(\frac{\frac{1}{2\cdot\sqrt{a}}}{\sqrt{a}\cdot\frac{1}{\sqrt[7]{a^5}}}\right)^{7}=\frac{2^7\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}}{\sqrt{a}^7\cdot\frac{1}{\sqrt{a}^{5}}}=\frac{2^7}{\sqrt{a}}\cdot\frac{1}{\sqrt{a}^2}=$$

$$=\frac{2^7}{\sqrt{a}^3}=\frac{2^7}{0{,}5^3}=2^7\cdot2^3=2^{10}=1024.$$

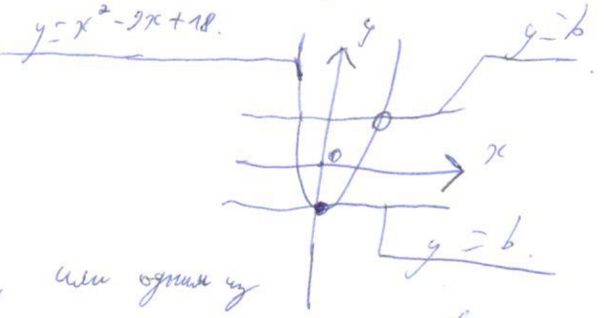
$$32\times32=64+96=1024$$

Ответ: 1024.

4.

$y=b;\ y=\frac{(x^2-10x+21)(x-6)}{x-7}=\frac{(x-7)(x-3)(x-6)}{x-7}=(x-3)(x-6)$, где $x\neq7$.

$y=x^2-9x+18$ — парабола с выколотой точкой.



$y=b=x^2-9x+18$

$x^2-9x+18-b=0.$

$D=81-72+4b=4b+9$

Чтобы графики пересекались в одной точке, или $D=0$, или один из решений уравнения является $x=7$. (тогда было бы два решения, но одного из них (точки, где $x=7$) не существует).

$D=0=4b+9.$

$\boxed{b=-\frac{9}{4}}.$

$x_1=\frac{9+\sqrt{4b+9}}{2}=7$

$x_2=\frac{9-\sqrt{4b+9}}{2}=7.$

$\sqrt{4b+9}=14-9$

$4b+9=25$

$\boxed{b=4}.$

$-\sqrt{4b+9}=14-9$

$\sqrt{4b+9}=-5$, что невозможно.

Ответ: $-\frac{9}{4}$; 4.

6.

$k_1=2{,}9\%$

$k_2=3{,}1\%.$

$x_{min}=?$

Пусть x — всё число учеников 9 А класса. h — число учеников в „пределах" (в этих 0,2 %).

$\frac{x\cdot3{,}1}{100}-\frac{x\cdot2{,}9}{100}=h\in N.$

Как минимум, там 1 ученик. Максимума нет. Но мы ищем минимум.

$x\cdot\frac{0{,}2}{100}=h.$

$x\cdot\frac{1}{500}=h$

$x=500h.$ $x⋮500.$

$h_{min}=1,$

$x=500k,\ k_{min}=1.$

$x_{min}=500.$

Ответ: 500 учеников.

7. $\left|1+y-\sqrt{y^2-2xy+x^2}\right|$ (I - ое) $+\ (y^2-6y+x^2-17)^2$ (II - ое) $=0.$

Так как оба слагаемых неотрицательны, их сумма ≥ 0. Т.к. сумма $=0$, то оба слагаемых $=0$. Тогда можно составить систему.

$$\begin{cases} 1+y-\sqrt{y^2-2xy+x^2}=0. \\ y^2-6y+x^2-17=0 \end{cases}$$

$1+y=\sqrt{y^2-2xy+x^2}$

$y^2+2y+1-y^2+2xy-x^2=0.$

$x^2-1\ +\ 2y(x+1)=0$

$(x+1)(x-1-2y)=0.$

$$\left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1+2y. \end{array}\right.$$

$y^2-6y+x^2-17=0$

1). $x=-1.$

$y^2-6y+1-17=0$

$y^2-6y-16=0$

$y_1=8$ (По Th Виета)

$y_2=-2$

2). $x=1+2y$

$x^2=1+4y+4y^2$

$y^2-6y+1+4y+4y^2-17=0$

$5y^2-2y-16=0$

$D=1+16\cdot5=81$

$y_1=\frac{1+9}{5}=2 \quad x_1=1+2y_1=5$

$y_2=\frac{1-9}{5}=-\frac{8}{5}. \quad x_2=1+2y_2=-\frac{11}{5}.$

Ответ: $(-1;-2)$; $(-1;8)$; $(5;2)$; $(-\frac{11}{5};-\frac{8}{5})$.

---

8. $\frac{4x}{x^2+x+3}-\frac{4x}{x^2-5x+3}=-\frac{3}{2}.$ $\quad t=x+\frac{3}{x}.$

$\frac{4}{x+\frac{3}{x}+1}-\frac{4}{x+\frac{3}{x}-5}=-\frac{3}{2}$

$\frac{4}{t+1}-\frac{4}{t-5}=-\frac{3}{2}\ \Big|\cdot(t+1)(t-5)\cdot2$

$3t^2-12t-15-48=0$

$t^2-4t-21=0$

$t_1=7$ (По Th Виета).

$t_2=-3$

$t=7=x+\frac{3}{x}\ \Big|\cdot x$

x^2-7x+3

$D=49-12=37$

$x_1=7+\sqrt{37}\cdot0{,}5$

$x_2=7-\sqrt{37}\cdot0{,}5$

$x_1+x_2=\frac{7+\sqrt{37}+7-\sqrt{37}}{2}=\frac{14}{2}=$

$=7.$

$x+\frac{3}{x}+3=0\ \Big|\cdot x$

$x^2+3x+3=0$

$D=9-12<0.$

$x\in\varnothing.$

Ответ: 7.

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 14274

9.

$c = 5$ см
$d = 12$ см.

$a = ?$ $b = ?$

Центр. впис. окр. лежит на т. перес. биссектрисс. Тогда $\angle OBK = \angle OBL$, $\angle OAL = \angle OAM$ на чертеже.

ΔOLA равен ΔOMA по гипотенузе и острому углу. Тогда $AL = AM = d$.

Аналогично $BL = BK = c$.

$BC = c + r$; $AC = d + r$.

$KC = r = CM$.

По т. Пифагора, $BC^2 + AC^2 = AB^2$.

$(c+r)^2 + (d+r)^2 = (c+d)^2$.

$r^2 + 10r + 25 + r^2 + 24r + 144 - 289 = 0$.

$r^2 + 17r - 60 = 0$.

$D = 289 + 240 = 529 = 23^2$.

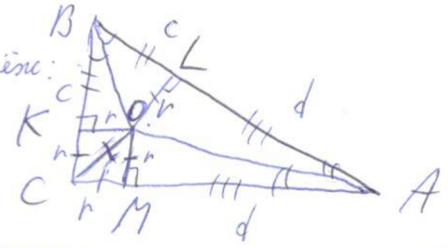
$r_1 = \frac{-17+23}{2} = 3$

$r_2 = \frac{-17-23}{2} = -20$, но $r > 0$.

$a = BC = c + r = 5 + 3 = 8$ см $b = AC = d + r = 15$ см.

Ответ: 8 см и 15 см.

Чертёж:



~~$OK \perp CK$ $\angle C = 90°$~~

$\angle OKC = 90°$, $\angle C = 90°$, $\angle OMC = 90°$,

~~$OK = OM$~~ значит $KC \parallel OM$ и $OK \parallel CM$, $OKCM$ — #.

$OK = CM = OM = KC \Rightarrow OKCM$ — квадрат.

(по свойству противолежащих углов и сторон параллелограмма)

10.

$m_1 = 5$ кг
$\Delta m = 2$ кг.
$\omega_2 = 15\%$.
$\omega_3 = 24\%$.

$\omega_1 = ?$

Итак, операцию (убрать 2 кг, добавить 2 кг II смеси) проделали два раза.

В самом конце осталось 5 кг смеси, из чего 24% — фосфор. Рассчитаем, сколько получилось фосфора в конце.

$m_{фк} = m_1 \cdot \omega_3 = 1{,}2$ кг. Он получился из фосфора 2 кг II смеси и некой предыдущей (того, что получилось после первой операции).

Посчитаем сколько фосфора в 2 кг II смеси. $m_{фII} = \Delta m \cdot \omega_2 = 0{,}3$ кг.

Тогда после первой операции оставалось $m_{ф2} = m_{фк} - m_{фII} = 0{,}9$ кг. в 3 кг смеси.

Тогда в 5 кг такой смеси было $m_{ф2к} = 0{,}9 \cdot \frac{5}{3} = 1{,}5$ кг фосфора.

Рассмотрим первую операцию. К 3 кг изначальной смеси добавляют 2 кг II смеси, в результате чего получилось 1,5 кг фосфора в сумме. В 2 кг II смеси содержится $m_{фII} = 0{,}3$ кг фосфора, это мы уже считали. Тогда в 3 кг первонач. смеси было $m_{ф1} = m_{ф2к} - m_{фII} = 1{,}2$ кг фосфора.

$\frac{m_{ф1}}{m_1} \cdot 100\%$ — и есть массовая доля фосфора в первонач. смеси. $\frac{m_{ф1}}{m_1} \cdot 100\% = \frac{1{,}2}{3} \cdot 100 = 0{,}4 \cdot 100 = 40\% = \omega_1$.

Ответ: 40%.