



ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

ШИФР

3555

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

[illegible][illegible][illegible]

Номер варианта	6		
----------------	---	--	--

Класс 11

Вариант 6

Дата Олимпиады 11.02.2017

Площадка написания УГНТУ

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	2	5	5	10	10	10	15	0	20	82	восемьдесят два	

№ 1. $(x^2 + 2x + 2)(x^2 + 2x - 2) = 5$

$$x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x^3 + 4x^2 + 4x - 2x^2 - 4x - 4 - 5 = 0$$

$$x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 9 = 0$$

$$x^2(x^2 + 4x + 4) - 9 = 0$$

$$(x+2)^2 \cdot x^2 - 9 = 0$$

$$(x(x+2) - 3)(x(x+2) + 3) = 0$$

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 3 = 0 \\ x^2 + 2x + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$$

Ответ: $x = \{-3; 1\}$.

№ 2. $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-3} = 2\sqrt{x}$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ x-3 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x \geq 3 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 3$$

$$2x+1 + x-3 + 2\sqrt{(2x+1)(x-3)} = 4x$$

$$2\sqrt{(2x+1)(x-3)} = x+2$$

$$4(2x+1)(x-3) = x^2 + 4x + 4$$

$$4(2x^2 + x - 6x - 3) = x^2 + 4x + 4$$

$$8x^2 + 4x - 24x - 12 = x^2 + 4x + 4$$

$$7x^2 - 24x - 8 = 0 \quad -16$$

$$D = 576 + 224 = 800 = 32^2$$

$$x_1 = \frac{24 - 20\sqrt{2}}{2} = 12 - 10\sqrt{2} \quad (\text{не угод. ОДЗ})$$

$$x_2 = 12 + 10\sqrt{2}$$

Ответ: $x = 12 + 10\sqrt{2}$

№ 3. $\frac{x^2 - 2}{x^2 - 1} < -2$

$$\frac{x^2 - 2}{x^2 - 1} + 2 < 0$$

$$\frac{x^2-2}{x^2-1} + 2 < 0$$

$$\frac{x^2-2+2x^2-2}{(x-1)(x+1)} < 0$$

$$\frac{3x^2-4}{(x-1)(x+1)} < 0$$

$$\frac{(x - \frac{2\sqrt{3}}{3})(x + \frac{2\sqrt{3}}{3})}{(x-1)(x+1)} < 0$$

$$\begin{array}{c} + \quad - \quad + \quad - \quad + \\ \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \\ -\frac{2\sqrt{3}}{3} \quad -1 \quad 1 \quad \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{array}$$

$$x \in (-\frac{2\sqrt{3}}{3}, -1) \cup (1, \frac{2\sqrt{3}}{3})$$

$$\text{Ответ: } x \in (-\frac{2\sqrt{3}}{3}, -1) \cup (1, \frac{2\sqrt{3}}{3})$$

$$\sim 4. \log_4(2x+3) + \log_4(x-1) = 2 - \log_4(\frac{16}{3}) ; \text{ ОДЗ: } \begin{cases} 2x+3 > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$$

$$\log_4(2x+3)(x-1) = 2 + \log_4 3 - 2$$

$$\log_4(2x+3)(x-1) = \log_4 3$$

$$(2x+3)(x-1) = 3$$

$$2x^2+3x-2x-3-3=0$$

$$2x^2+x-6=0$$

$$D=1+48=49$$

$$x_1 = \frac{-1-7}{4} = -2 \text{ (не угод. ОДЗ)}$$

$$x_2 = \frac{-1+7}{4} = \frac{6}{4} = 1,5$$

$$\text{Ответ: } x = 1,5$$

$$\sim 5. 4^x > 4 - 3 \cdot 2^x$$

$$\text{Пусть } 2^x = t; t > 0(1)$$

$$t^2 > 4 - 3t$$

$$t^2 + 3t - 4 > 0$$

$$(t-1)(t+4) > 0$$

$$t \in (-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$$

с учетом ~~ОДЗ~~ имеем: $t > 1$; верн. к замене: $2^x > 1$; $x > 0$
усл. (1) Ответ: $x > 0$

2. № 6. В действительности было принято на 15 человек больше, значит 15 человек составляет $7\frac{9}{13}\%$ от планируемого кол-ва абитуриентов.

Найдем кол-во планируемых абитуриентов:

$$15 = \frac{100}{13 \cdot 100} \cdot x$$

$$x = 15 \cdot 13$$

$$x = 195$$

1) Планируемое кол-во на А: $\frac{195}{13} \cdot 4 = 60$

Действительное кол-во на А: $60 + 4 = 64$

2) Пл-ое кол-во на В: $\frac{195}{13} \cdot 3 = 45$

Дей-ое кол-во на В: $45 + 5 = 50$

3) Пл-ое кол-во на С: $\frac{195}{13} \cdot 6 = 90$

Действ-ое кол-во на С: $90 + 6 = 96$

Ответ: на А - 64 чел.; на В - 50 чел.; на С - 96 чел.

~ 10.

$$\text{Пусть } \sqrt[3]{20 + \sqrt{392}} + \sqrt[3]{20 - \sqrt{392}} = x$$

$$20 + \sqrt{392} + 3 \sqrt[3]{20 + \sqrt{392}}^2 \cdot \sqrt[3]{20 - \sqrt{392}} + 3 \sqrt[3]{20 + \sqrt{392}} \cdot \sqrt[3]{20 - \sqrt{392}}^2 + 20 - \sqrt{392} = x^3$$

$$3 \sqrt[3]{20 + \sqrt{392}} \cdot \sqrt[3]{20 - \sqrt{392}} (\sqrt[3]{20 + \sqrt{392}} + \sqrt[3]{20 - \sqrt{392}}) = x^3 - 40$$

$$2 \sqrt[3]{(20 + \sqrt{392})(20 - \sqrt{392})} \cdot x^3 = (x^3 - 40)^3$$

$$216 x^3 = 27(400 - 392) \cdot x^3 = (x^3 - 40)^3$$

$$216 \cdot x^3 = (x^3 - 40)^3$$

$$6x = x^3 - 40$$

$$x^3 - 6x - 40 = 0$$

$$x_0 = 4$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 6x - 40 & x - 4 \\ \hline x^3 - 4x^2 & x^2 + 4x + 10 \\ \hline 4x^2 - 6x & \\ -4x - 16 & \\ \hline 10x - 40 & \\ -10x - 40 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$(x - 4)(x^2 + 4x + 10) = 0$$

$x = 4$ - искомое значение

Ответ: 4

Использовать только эту сторону листа,
обратная сторона не проверяется!

ШИФР

3555

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ \sin x \cdot \cos y = -\frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

Пусть $\sin x = a$; $-1 \leq a \leq 1$ (1)
 $\cos y = b$; $-1 \leq b \leq 1$ (2)

$$\begin{cases} a = \frac{1-\sqrt{3}}{2} - b \\ \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2} - b\right) \cdot b = -\frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases} \quad (3)$$

Решим (3):

$$\frac{b - \sqrt{3}b - 2b^2}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$$

$$\frac{2b - 2\sqrt{3}b - 4b^2 + \sqrt{3}}{4} = 0$$

$$-4b^2 + 2b(1-\sqrt{3}) + \sqrt{3} = 0$$

$$4b^2 - 2(1-\sqrt{3})b - \sqrt{3} = 0$$

$$D = 4(1-2\sqrt{3}+3) + 16\sqrt{3} = 4 - 8\sqrt{3} + 3 + 16\sqrt{3} = 7 - 8\sqrt{3} = (2-\sqrt{3})^2 - 4\sqrt{3}$$

$$b_1 = 2(1-\sqrt{3}) -$$

$$c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Использовать только эту сторону листа,
обратная сторона не проверяется!

ШИФР

3555

~ 7.

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

$$b_5 = b_1 \cdot q^4 = q^4$$

$$b_9 = b_1 \cdot q^8 = q^8$$

$$\text{По укл: } q^8 + q^4 = 6$$

$$\text{Пусть } q^4 = t; t > 0(1)$$

$$t^2 + t - 6 = 0$$

$$D = 25$$

$$t_1 = \frac{-1 \pm 5}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$t_2 = \frac{-1 - 5}{2} = -\frac{3}{2} \text{ (не укл. укл. (1))}$$

Верн. к зам:

$$q^4 = 2$$

$$q = \pm \sqrt[4]{2}$$

$$1) q = \sqrt[4]{2}$$

$$S_n = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

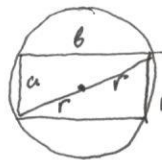
$$S_{13} = \frac{\sqrt[4]{2}^{13} - 1}{\sqrt[4]{2} - 1} = \frac{\sqrt[4]{2}^{12} \cdot \sqrt[4]{2} - 1}{\sqrt[4]{2} - 1} = \frac{8\sqrt[4]{2} - 1}{\sqrt[4]{2} - 1} = 1 + \frac{7\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2} - 1}$$

$$2) q = -\sqrt[4]{2}$$

$$S_{13} = \frac{-\sqrt[4]{2}^{13} - 1}{-\sqrt[4]{2} - 1} = \frac{-8\sqrt[4]{2} - 1}{-\sqrt[4]{2} - 1} = \frac{-\sqrt[4]{2} - 1 - 7\sqrt[4]{2}}{-\sqrt[4]{2} - 1} = 1 - \frac{7\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2} - 1}$$

$$\text{Ответ: } 1 \pm \frac{7\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2} - 1}$$

~ 8.



$$a \cdot b = \frac{\pi r^2}{2}$$

$$\begin{cases} a \cdot b = \frac{\pi}{2} \\ a^2 + b^2 = 4r^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \cdot b = \frac{\pi}{2} \\ a^2 + b^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{\pi}{2b} \\ \frac{\pi^2}{4b^2} + b^2 = 4(1) \end{cases}$$

Решим (1):

$$\frac{\pi^2}{4b^2} + b^2 - 4 = 0 \quad | \cdot b^2$$

$$b^4 - 4b^2 + \pi^2 = 0$$

$$D = 4 \cdot 4 - \pi^2 = 16 - \pi^2$$

$$b^2 = \frac{4 \pm \sqrt{16 - \pi^2}}{2} = 2 \pm \sqrt{\frac{8}{2} - \frac{\pi^2}{4}} = 2 \pm \sqrt{4 - \frac{\pi^2}{4}}$$

$$b = \sqrt{2 \pm \sqrt{4 - \frac{\pi^2}{4}}}$$

Верн. к системе:

$$a = \sqrt{4 - b^2} = \sqrt{4 - 2 \pm \sqrt{4 - \frac{\pi^2}{4}}} = \sqrt{2 \mp \sqrt{4 - \frac{\pi^2}{4}}}$$

$$\text{Ответ: } a = \sqrt{2 - \sqrt{4 - \frac{\pi^2}{4}}}; b = \sqrt{2 + \sqrt{4 - \frac{\pi^2}{4}}}$$

(4)