

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

ШИФР 3339

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

[illegible][illegible][illegible]

Номер варианта	5	
----------------	---	--

ШИФР

3339

Класс 11

Вариант 5

Дата Олимпиады 11.02.2017

Площадка написания

у у х х у

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	5	5	5	10	10	10	12	10	20	92	девятно два	

N1

$$(x+1)(x+3)(x+5) = x(x^2-9)$$

$$(x+1)(x+3)(x+5) = x(x-3)(x+3)$$

$$\begin{cases} x = -3 \\ (x+1)(x+5) = x(x-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x^2 + 6x + 5 = x^2 - 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ 9x = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = -\frac{5}{9} \end{cases}$$

Ответ: -3 ; $-\frac{5}{9}$

N2

$$\sqrt{22-x} - \sqrt{10-x} = 2$$

$$\text{ОДЗ: } x \leq 10$$

$$\sqrt{22-x} = 2 + \sqrt{10-x}$$

$$22-x = 4 + 4\sqrt{10-x} + 10-x$$

$$8 = 4\sqrt{10-x}$$

$$2 = \sqrt{10-x}$$

$$4 = 10-x$$

$$x = 6; \text{ Пог ОДЗ подходит}$$

Ответ: 6

№ 3

$$\frac{x^2 + 2}{x^2 - 1} < -2$$

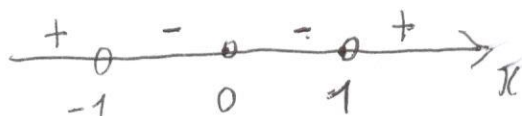
$$OДЗ: x \neq \pm 1$$

$$\frac{x^2 + 2}{x^2 - 1} < -2 \quad \frac{2(x^2 + 1)}{x^2 - 1}$$

$$\frac{x^2 + 2 + 2(x^2 - 1)}{(x - 1)(x + 1)} < 0$$

$$\frac{x^2 + 2 + 2x^2 - 2}{(x - 1)(x + 1)} < 0$$

$$\frac{3x^2}{(x - 1)(x + 1)} < 0 \quad \text{Вспомогательная методика интервалов}$$



$$x \in (-1; 0) \cup (0; 1)$$

$$\text{Ответ: } (-1; 0) \cup (0; 1)$$

№ 6

Пусть во втором корпусе живет x человек. Тогда в третьем живет $x + 4$ человек, а в первом $x + 4 + 3$. Составим уравнение

$$(x + 4 + 3)(x)(x + 4 + 3) = 119$$

$$3x = 108$$

$x = 36$ - живет во втором. Тогда во первом $x + 4 = 36 + 4 = 40$ чел.;

в третьем $x + 7 = 36 + 7 = 43$ человека

Ответ: в I-ом 40; во II 36; в III-ем 43.

$$c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР

3339

№ 9

$$\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = \frac{3}{4} \\ \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = 3 \end{cases}$$

$$\text{ОДЗ } \operatorname{tg} x \neq 0, \operatorname{tg} y \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi k, y \neq \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi l, \text{ где } k, l \in \mathbb{Z}$$

Поделим 1 на 2:

$$\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = \frac{3}{4} \\ \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right) \cdot \left(\frac{\sin y}{\cos y} \right) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \cdot \sin y = \frac{3}{4} \\ \cos x \cdot \cos y = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \cdot \sin y = \frac{3}{4} \\ \cos^2 x \cdot \cos^2 y = \frac{1}{16} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin y = \frac{3}{4} \sin x \\ \cos^2 x (1 - \sin^2 y) = \frac{1}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin y = \frac{3}{4} \sin x \\ \cos^2 x \left(1 - \frac{9}{16} \sin^2 x \right) = \frac{1}{16} \end{cases} \text{ решим это уравнение:}$$

$$\cos^2 x \left(1 - \frac{9}{16} \sin^2 x \right) = \frac{1}{16} \Leftrightarrow 16 \cos^2 x \sin^2 x - 9 \cos^2 x = \sin^2 x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16 \cos^2 x (1 - \cos^2 x) - 9 \cos^2 x = 1 - \cos^2 x \Leftrightarrow 16 \cos^2 x - 16 \cos^4 x - 9 \cos^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow -16 \cos^4 x + 8 \cos^2 x - 1 = 0 \Leftrightarrow 16 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1 = 0 \text{ Пусть } \cos^2 x = t, \text{ тогда}$$

$$16t^2 - 8t + 1 = 0$$

$$D = 64 - 4 \cdot 16 = 0$$

$$t = \frac{8}{2 \cdot 16} = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{м.к } \cos^2 x = t, \text{ то } \cos^2 x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \text{ или } \cos x = -\frac{1}{2}$$

Вернемся к системе

$$\begin{cases} \cos x \cdot \cos y = \frac{1}{4} \\ \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos y = \frac{1}{2} \\ \cos y = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\pi}{3} + 2\pi n \\ y = -\frac{\pi}{3} + 2\pi p \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi f, \text{ где } m, n, p, f \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\text{Проверка для I случая: } \left(\sin \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi m \right) \cdot \sin \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n \right) \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4}$$

$$\left\{ \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi m \right) \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n \right) = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3, \text{ верно, где } m, n \in \mathbb{Z} \right.$$

$$\text{Для II случая } \left(\sin \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi p \right) \cdot \sin \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi f \right) \right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{3}{4}$$

$$\left\{ \operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi p \right) \cdot \operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi f \right) = (-\sqrt{3}) \cdot (-\sqrt{3}) = 3, \text{ верно, где } p, f \in \mathbb{Z} \right.$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi m; \frac{\pi}{3} + 2\pi n \right); \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi p; -\frac{\pi}{3} + 2\pi f \right), \text{ где } m, n, p, f \in \mathbb{Z}$$

№ 5 $5^{2x+1} > 5^{11} + 4$

$$5^{2(x+1)} - 5^{11} > 4$$

$$5^x (5^{2(x+1)} - 1) > 4$$

Пусть $5^x = t$, тогда:

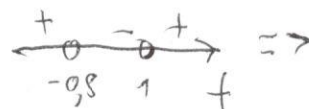
$$t(5t - 1) > 4 \Leftrightarrow 5t^2 - t > 4 \Leftrightarrow 5t^2 - t - 4 > 0$$

Решим уравнение $5t^2 - t - 4 = 0$

$$D = 1 + 4 \cdot 5 = 9^2$$

$$t = \frac{1 \pm 3}{2 \cdot 5} = \begin{cases} 1 \\ -0,8 \end{cases} \Rightarrow$$

$$5t^2 - t - 4 > 0 \Leftrightarrow (t-1)/(t+0,8) > 0$$



$$\Rightarrow \begin{cases} t < -0,8 \\ t > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5^x < -0,8 \\ 5^x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{1-го не имеет решений} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; \infty)$$

Ответ: $(0; \infty)$

№ 4 $\lg(11-13) + 3\lg 2 = \lg(3)(+1)$

ОДЗ: $\begin{cases} 11-13 > 0 \\ 3)(+1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11 > 13 \\ 11 > \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow 11 > 13$

$$\lg(11-13) + \lg 2^3 = \lg(3)(+1)$$

$$\lg 8(x-13) = \lg 3(x+1)$$

$$\lg(8x-104) = \lg(3x+3)$$

$$8x-104 = 3x+3$$

$$5x = 105$$

$$x = 21 \quad \text{из ОДЗ}$$

Ответ: 21

N 7

Какая Φ прогрессия $b_1, b_1q, b_1q^2, \dots$

$$S = \frac{b_1}{1-q} \Rightarrow \frac{b_1}{1-q} = 3$$

Квадраты

Квадраты ее членов образуют ариф. прогрессию: $b_1^2, b_1^2q^2, \dots$

$$\text{тогда } S_2 = \frac{b_1^2}{1-q^2} \Rightarrow \frac{b_1^2}{1-q^2} = 4,5$$

Решим систему:

$$\begin{cases} \frac{b_1}{1-q} = 3 \\ \frac{b_1^2}{1-q^2} = 4,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = 3 - 3q \\ b_1^2 = 4,5 - 4,5q^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = 3 - 3q \\ (3 - 3q)^2 = 4,5 - 4,5q^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = 3 - 3q \\ 9 - 18q + 9q^2 = 4,5 - 4,5q^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = 3 - 3q \\ 13,5q^2 - 18q + 4,5 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$(1) \quad 13,5q^2 - 18q + 4,5 = 0$$

$$3q^2 - 4q + 1 = 0$$

$$D = 16 - 3 \cdot 4 = 4$$

$$q_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{3 \cdot 2} = \begin{cases} 1, \text{ что невозможно т.к. } q \text{ убывающая } (q < 1) \\ \frac{1}{3} \end{cases}$$

Вернемся к системе:

$$\begin{cases} b_1 = 3 - 3q \\ q = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = 2 \\ q = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Следовательно наша у нас прогрессия первый член 2, а знаменатель $\frac{1}{3}$
т.е. $2; \frac{2}{3}; \frac{2}{9}; \frac{2}{27}; \dots$

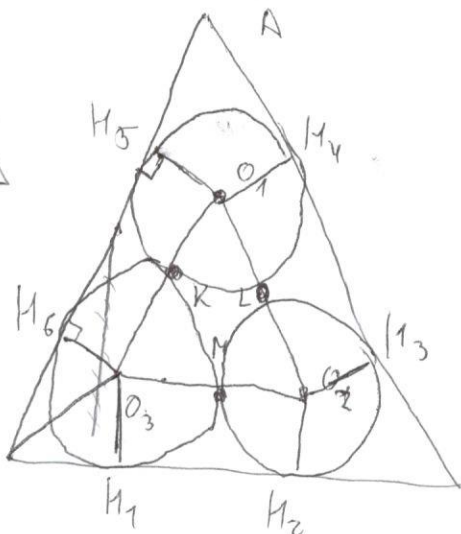
Ответ: $2; \frac{2}{3}; \frac{2}{9}; \frac{2}{27}; \dots$ $(b_1 = 2, q = \frac{1}{3})$

№ 8

- 1) Пусть K — ~~они~~ ^{пиццы} попарно соприкасаются, то если провести отрезки соединяющие ~~каждые~~ ^{каждые} центры окружностей O_1, O_2, O_3 , то они образуют правильный треугольник со стороной $2K$, где K — радиус пиццы!
точки K, L, M ; ~~как~~ точки касания окружностей



- 2) Если провести внешние общие касательные, то получится правильный треугольник ABC . Потому что:



$(H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6)$ — перп. к т. касания с общими касательными

$$\angle O_1 H_5 H_6 = \angle O_3 H_6 H_3 = 90^\circ$$

$$\text{т.к. касательные} \Rightarrow H_6 K =$$

$$= \angle H_6 K = 90^\circ \Rightarrow \angle H_6 O_3 O_1 =$$

$$= \angle H_5 O_1 O_3 = 90^\circ \Leftrightarrow$$

$$H_5 H_6 \parallel O_1 O_3$$

Аналогично доказывается, что

$$H_4 H_3 \parallel O_1 O_2, H_1 H_2 \parallel O_3 O_2, \text{ а.т.к. } H_5 H_6 \in AC, H_4 H_3 \in AB, H_1 H_2 \in BC,$$

то $BC \parallel O_2 O_3, O_1 O_3 \parallel AC, AB \parallel O_1 O_2$, а.т.к. $O_1 O_2 O_3$ — правильный $\Rightarrow ABC$ — правильный

- 3) Докажем, что площадь этого треугольника (ABC) минимальна из всех других возможных.

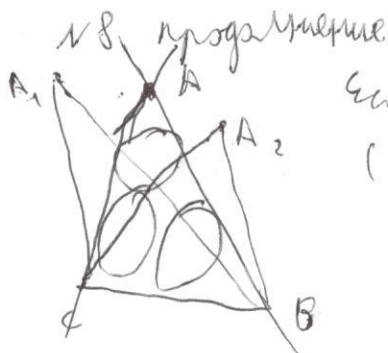
~~Предположим, что~~ Не уменьшая общности

Предположим, что A — одна из вершин $\triangle ABC$. Пусть эта точка будет A_1 . Но тогда $\triangle A_1 BC$ не уменьшает в себя при касании "пиццы" (окружностей)



$c=a(bc)$

$E=mc^2$



Если попытаться сместить точку A ниже прямой AB (в сторону т.с) или выше прямой AC (в сторону B), то наш треугольник не уместит в себе эллипс (т. А₁ и А₂)

Если сместить ~~точка~~ точку A по прямой AB и AC или выше этих прямых, то как как минимум один угол $\angle A$ ($\angle ABC$ или $\angle ACB$) и стороны AB и AC увеличатся и тогда площадь нашего $\triangle ABC$ по формуле $S = \frac{1}{2} \sin \angle ABC \cdot AB \cdot BC$ или $S = \frac{1}{2} \sin \angle ACB \cdot AC \cdot BC$ увеличится.

Отсюда следует, что минимальная площадь имеет у нашего правильного $\triangle ABC$

4) $\left. \begin{array}{l} O_3 \text{ — ось } \Delta \\ O_3 H_1 = O_3 H_2 = V \\ CH_1 = CH_2 \text{ (как кас. из т.с)} \end{array} \right\} \Delta O_3 C H_1 = \Delta O_3 C H_2 \Rightarrow \angle H_1 = \angle H_2 = \angle O_3 C H_1 = \angle O_3 C H_2 =$
 $= \frac{1}{2} \angle ABC = 30^\circ \Rightarrow$
 $\Rightarrow \text{т.к. } O_3 H_1 = V, \text{ то } CH_1 = \frac{O_3 H_1 \cdot \sqrt{3}}{\tan 30^\circ} = V \cdot \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3} V$

Аналогично $H_2 B = \sqrt{3} V$

5) Т.к. $O_3 O_2 \parallel H_1 H_2$, $O_3 H_1 \perp BC$, $O_2 H_2 \perp BC$ то $O_2 O_3 H_2 H_1$ — прямоугольник $\Rightarrow$
 $H_1 H_2 = O_2 O_3 = 2V$

6) $BC = CH_1 + H_1 H_2 + H_2 B = (2\sqrt{3} + 2)V = 2(\sqrt{3} + 1)V$

7) $S_{\triangle ABC} = \frac{BC}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} BC \cdot 2 = \frac{\sqrt{3}}{2} BC^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} (2(\sqrt{3} + 1)V)^2 =$
 $= \frac{\sqrt{3}}{4} BC^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} (8(\sqrt{3} + 1)^2)V^2$

8) По условию $S = 4\sqrt{3} + 6 \Rightarrow 4\sqrt{3} + 6 = \frac{\sqrt{3}}{4} (8(\sqrt{3} + 1)^2)V^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 8 + 4\sqrt{3} = (\sqrt{3} + 1)^2 V^2 \Rightarrow V = \sqrt{\frac{8 + 4\sqrt{3}}{(\sqrt{3} + 1)^2}} = \sqrt{\frac{8 + 4\sqrt{3}}{4 + 2\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{2(4 + 2\sqrt{3})}{2(2 + \sqrt{3})}} = \sqrt{\frac{4 + 2\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}} = \sqrt{2} \text{ гм}$
 Ответ: $\sqrt{2} \text{ гм}$

110

$$\sqrt[3]{9+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{80}}$$

Возведем в 3-ю степень (нельзя возводить кубический корень, но в кубе)

$$\begin{aligned} (\sqrt[3]{9+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{80}})^3 &= 9+\sqrt{80} + 9-\sqrt{80} + 3(\sqrt[3]{(9+\sqrt{80})^2(9-\sqrt{80})} + \sqrt[3]{(9+\sqrt{80})(9-\sqrt{80})^2}) \\ &= 18 + 3(\sqrt[3]{(9+\sqrt{80})(81-9\sqrt{80}+9\sqrt{80}-80)} + \sqrt[3]{(9-\sqrt{80})(81-9\sqrt{80}+9\sqrt{80}-80)}) \\ &= 18 + 3(\sqrt[3]{9+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{80}}) \end{aligned}$$

$$\text{Если } \sqrt[3]{9+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{80}} = x, \text{ то } x^3 = 18 + 3x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x - 18 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 3(1+6) \text{ пусть } x = 3k, \text{ где } k \in \mathbb{R}, \text{ тогда:}$$

~~Итак корни по теореме Безу: если~~

$$10 \quad 27k^3 = 3(6+3k) \Leftrightarrow 9k^3 = 6+3k \Leftrightarrow 3k^3 - k - 2 = 0$$

$$\text{При } k=1 \text{ получаем: } 3-2-1=0 \text{ значит } 3k^3 - k - 2 \text{ на } (k-1):$$

$$\cancel{10} \quad 3k^3 - k - 2 = (k-1)(3k^2 + 3k + 2) \Leftrightarrow (k-1) | 3k^2 + 3k + 2 = 0$$

$$\text{Решим уравнение } 3k^2 + 3k + 2 = 0; D = 9 - 2 \cdot 3 \cdot 4 < 0 \text{ - реш. нет}$$

$$\text{Отсюда } k = 1, \text{ а.т.к. } x = 3k, \text{ то } x = 3, \text{ а.т.к. } \sqrt[3]{9+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{80}} = x,$$

$$\text{то } \sqrt[3]{9+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{80}} = 3$$

Ответ: 3

