ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «УФИМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НЕФТЯНОЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ» (ФГБОУ ВО «УГНТУ») Приемная комиссия

ШИФР 267

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

Дисциплина	МАТЕМАТИКА

Фамилия	САФИУЛЛИН
Имя	РАМИЛЬ
Отчество	ИЛЬДАРОВИЧ

№ школы	МБОУ ЛИЦЕЙ N 1
Населенный пункт	СЕЛО МИШКИНО

Номер варианта	5

ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

обратная сторона не проверяется!

ШИФР 267

Класс 11 Вариант 5 Дата Олимпиады 11.02.2017

Площадка написания УГНТУ

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	5	5	5	5	10	10	10	15	5	20	90	девяносто	

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 267

① $(x+1)(x+3)(x+5)=x(x^2-9)$

$(x+1)(x+3)(x+5)=x(x-3)(x+3)$

$(x+3)(x^2+6x+5)=(x+3)(x^2-3x)$

$(x+3)\left[(\cancel{x^2}+6x+5)-(\cancel{x^2}-3x)\right]=0;$

$(x+3)(9x+5)=0;$ $\left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=-\frac{5}{9} \end{array}\right.$ Отв: $\left\{-3; -\frac{5}{9}\right\}$.

+

② $\sqrt{22-x}-\sqrt{10-x}=2$

Пусть $22-x=t^2$, тогда $|t|-\sqrt{t^2-12}=2;$

$|t|-2=\sqrt{t^2-12}$ т.к. с обеих сторон неотр-е числа, $\uparrow^2$.

$(|t|-2)^2=t^2-12$

$|t|^2-4|t|+4=t^2-12;$ $\cancel{t^2}-4|t|+4=\cancel{t^2}-12;$ $-|t|+1=-3$

$|t|=4 \Rightarrow |t|^2=t^2=16$

$22-x=16$

$x=22-16=6$

ОДЗ: $\begin{cases} 22-x\geq 0 \\ 10-x\geq 0 \end{cases};$ $\begin{cases} x\leq 22 \\ x\leq 10 \end{cases} \Rightarrow x\leq 10$

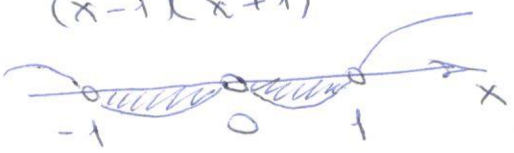
$x=6<10$

Отв: $\{6\}$.

③ $\frac{x^2+2}{x^2-1}<-2;$ $\frac{x^2+2}{x^2-1}+2<0;$ $\frac{x^2+2+2(x^2-1)}{x^2-1}<0$

$\frac{x^2+2x^2}{x^2-1}<0;$ $\frac{3x^2}{x^2-1}<0;$ $\frac{x^2}{x^2-1}<0;$ $\frac{x^2}{(x-1)(x+1)}<0$

Отв: $x\in(-1;0)\cup(0;1)$. +



④ $\lg(x-13)+3\lg 2=\lg(3x+1)$

ОДЗ: $\begin{cases} x-13>0 \\ 3x+1>0 \end{cases};$ $\begin{cases} x>13 \\ x>-\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow x>13$

$\lg(x-13)+\lg 8=\lg(3x+1)$

$\lg(8(x-13))=\lg(3x+1)$ +

$8x-104=3x+1$

$5x=105$

$x=21>13$ Отв: $\{21\}$.

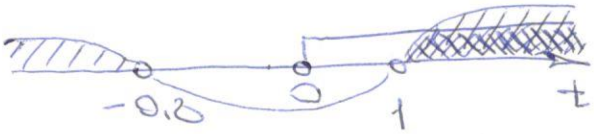
(5) $5^{2x+1} > 5^x + 4$

$5 \cdot 5^{2x} > 5^x + 4$

Пусть $5^x = t > 0$, тогда

$5t^2 > t + 4$; $5t^2 - t - 4 > 0$

$t = \frac{1 \pm \sqrt{1+80}}{10} = \frac{1 \pm 9}{10}$; $\left[\begin{array}{l} t = -0{,}8 \\ t = 1 \end{array}\right.$



$5(t+0{,}8)(t-1) > 0$; $(t+0{,}8)(t-1) > 0$

$t > 1 \Rightarrow 5^x > 1 \Rightarrow x > 0$

Отв: $x \in (0; +\infty)$. +

(6)
$\left.\begin{array}{l} \text{I} \quad x \\ \text{II} \quad x-4 \\ \text{III} \quad x+3 \end{array}\right\} 119$

$119 = x + (x-4) + (x+3)$

$119 = 3x - 1$ +

$3x = 120 \Rightarrow x = 40 \Rightarrow$ I: 40 (т-ка)
II: $40 - 4 = 36$ (т-ка)
III: $40 + 3 = 43$ (т-ка)

Отв: в 1-м — 40, во 2-м — 36, в 3-м — 43.

(7) $S = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n = b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \ldots + b_1 q^{n-1} = 3$

$S_{кв} = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \ldots + b_n^2 = b_1^2 + b_1^2 q^2 + b_1^2 q^4 + \ldots + b_1^2 q^{2n-2} = 4{,}5$

Квадраты членов беск-о убыв-й геом-й пр-сии сами представляют собой беск-о убыв-ю геом-ю пр-сию с $b_1' = b_1^2$ и $q' = q^2$.

$\begin{cases} S = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1} = 3 \\ S_{кв} = \frac{b_1'(q'^n - 1)}{q' - 1} = \frac{b_1^2(q^{2n}-1)}{q^2-1} = 4{,}5 \end{cases}$; $\begin{cases} S^2 = \frac{b_1^2(q^n-1)^2}{(q-1)^2} = 9 \\ S_{кв} = \frac{b_1^2(q^n-1)(q^n+1)}{(q-1)(q+1)} = 4{,}5 \end{cases}$

$\frac{S^2}{S_{кв}} = \frac{\cancel{b_1^2}(q^n-1)^{\cancel{2}}}{(q-1)^{\cancel{2}}} \cdot \frac{\cancel{(q-1)}(q+1)}{\cancel{b_1^2}\cancel{(q^n-1)}(q^n+1)} = \frac{9}{4{,}5} = 2$;

$\frac{(q^n-1)(q+1)}{(q^n+1)(q-1)} = 2$; т.к. геом. пр-е беск-но убыв-е, $0 < q < 1$ и $n \to \infty$, $\Rightarrow q^n \to 0 \Rightarrow q^n - 1 \to -1$
$q^n + 1 \to 1$

(+)

$\frac{(-1)(q+1)}{1(q-1)} = 2$; $\frac{q+1}{q-1} = -2$; $q + 1 = -2q + 2$; $3q = 1$; $q = \frac{1}{3}$

$S = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1} = \frac{b_1(-1)}{\frac{1}{3}-1} = \frac{b_1}{\frac{2}{3}} = \frac{3b_1}{2} = 3$; $\frac{b_1}{2} = 1$; $b_1 = 2$

Ответ: 1-й член $b_1 = 2$, знам-ль пр-и $q = \frac{1}{3}$.

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

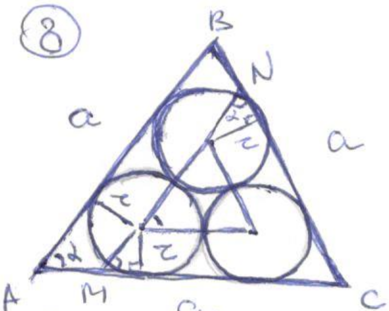
ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 267

(8)



Дано: $r_1 = r_2 = r_3$

$S_{min} = 4\sqrt{3} + 6$ дм²

Н-ти: r - ?

Решение: наим-ю площадь коробка будет иметь тогда, когда каждая ее сторона соприкасается с двумя пиццами. Иными словами, коробка представляет собой правильный треугольник. Обозначим сторону коробки через a, а радиус пиццы — r. $\alpha = 60^\circ$. Центры пицц, в свою очередь, составляют правильный треугольник со стороной $2r$.

$$MN = 2r + \frac{r}{\sin\alpha} + \frac{r}{\sin\alpha} = 2r + \frac{2r}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2r + \frac{4r}{\sqrt{3}};$$

$$\frac{MN}{AB} = \frac{a\sin\alpha - r}{a\sin\alpha}; \quad \frac{2r + \frac{4r}{\sqrt{3}}}{\cancel{a}} = \frac{a\sin\alpha - r}{\cancel{a}\sin\alpha};$$

$$2r + \frac{4r}{\sqrt{3}} = a - \frac{r}{\frac{\sqrt{3}}{2}}; \quad 2r + \frac{4r}{\sqrt{3}} = a - \frac{2r}{\sqrt{3}}; \quad 2r + \frac{6r}{\sqrt{3}} = a;$$

$$2r + 2\sqrt{3}r = a;$$

$$S_{min} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}; \quad a = \frac{2\sqrt{S_{min}}}{\sqrt[4]{3}}; \quad a = \frac{2\sqrt{4\sqrt{3}+6}}{\sqrt[4]{3}};$$

$$2(1+\sqrt{3})r = a; \quad r = \frac{a}{2(1+\sqrt{3})} = \frac{\cancel{2}\sqrt{4\sqrt{3}+6}}{\sqrt{\sqrt{3}}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}(1+\sqrt{3})} =$$

$$= \sqrt{\frac{4\sqrt{3}+6}{\sqrt{3}(1+\sqrt{3})^2}} = \sqrt{\frac{4\sqrt{3}+6}{\sqrt{3}(1+2\sqrt{3}+3)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{4\sqrt{3}+6}{4\sqrt{3}+2\cdot 3}} = \sqrt{\frac{4\sqrt{3}+6}{4\sqrt{3}+6}} = 1 \text{ (дм)} \quad r = 1 \text{ (дм)}$$ +

Отв: 1 дм.

(9)

$$\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = \frac{3}{4} \\ \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = 3 \end{cases}; \quad \begin{cases} \sin x \cdot \sin y = \frac{3}{4} \\ \frac{\sin x \cdot \sin y}{\cos x \cdot \cos y} = 3 \end{cases} \Bigg| :$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = \frac{3}{4} \\ \cos x \cdot \cos y = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Если $x = y$, $\sin^2 x = \sin^2 y = \frac{3}{4}$; $\sin x = \sin y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos^2 x = \cos^2 y = \frac{1}{4}$; $\cos x = \cos y = \pm\frac{1}{2}$

...

Если $x \neq y$ => ...

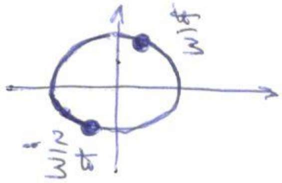
ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 267

9) ... $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \text{ где } k \in Z \\ x = y = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \text{ где } n \in Z \end{array} \right.$



$x = y = \frac{\pi}{3} + \pi k$, где $k \in Z$.

Отв: $\left(\frac{\pi}{3} + \pi k; \frac{\pi}{3} + \pi k\right)$, где $k \in Z$.

10) $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{80}} = \sqrt[3]{\left(\sqrt[3]{9+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{80}}\right)^3} =$

$= \sqrt[3]{18 + 3\left(\sqrt[3]{9+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{80}}\right)}$;

пусть $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{80}} = t$, тогда

$t = \sqrt[3]{18+3t}$; $t^3 = 18 + 3t$; $t^3 - 3t - 18 = 0$

$t_1 = 3$; $t^3 - 3t - 18 = (t-3)(t^2+3t+6)$

$D < 0 \Rightarrow \varnothing$

$t = 3$

$\sqrt[3]{9+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{80}} = 3$

Отв: $\{3\}$.