ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 10629

Класс ______ Вариант ______ Дата Олимпиады ______

Площадка написания ______

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	5	5	5	5	10	10	10	15	10	20	90	девяносто	Р Вошинина

1. Преобразуем уравнение:

$((x^2-2x+1)+1)((x^2-2x+1)-3)=5 \Leftrightarrow ((x-1)^2+1)((x-1)^2-3)=5$

Пусть: $(x-1)^2=t$ ~~$t\geq 0$~~ $(D: t\geq 0)$.

Уравнение имеет вид:

$(t+1)(t-3)=5 \Leftrightarrow t^2-2t-3=5 \Leftrightarrow t^2-2t-8=0 \Leftrightarrow$ (по т. Виета)

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=4 \\ t=-2 \end{array}\right.$ $(<0$, см. $D)$

т.о. $(x-1)^2=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=2 \\ x-1=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-1 \end{array}\right.$

Ответ: $\{-1; 3\}$.

2. $D: \begin{cases} 3x-3\geq 0 \\ x-3\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ x\geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \underline{x\geq 3}.$

$\sqrt{3x-3}=4+\sqrt{x-3}$.

т.к. обе части ~~больше~~ неотрицательны, то при возведении обеих частей в квадрат получим равносильное равенство:

$3x-\cancel{3}=16+x-\cancel{3}+8\sqrt{x-3} \Leftrightarrow 2x-16=8\sqrt{x-3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-8=4\sqrt{x-3}$ $(D_2: x-8\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 8)$

Обе части ~~больше~~ неотрицательны (при $x\in D_2$), следовательно при возведении в квадрат получим равносильное равенство:

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 10629

$x^2+64-16x=16x-48 \Leftrightarrow x^2-2\cdot 16x+112=0. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=16\pm\sqrt{256-112}=16\pm 12 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=28 \\ x=4 \ (\notin D_2) \end{array}\right.$

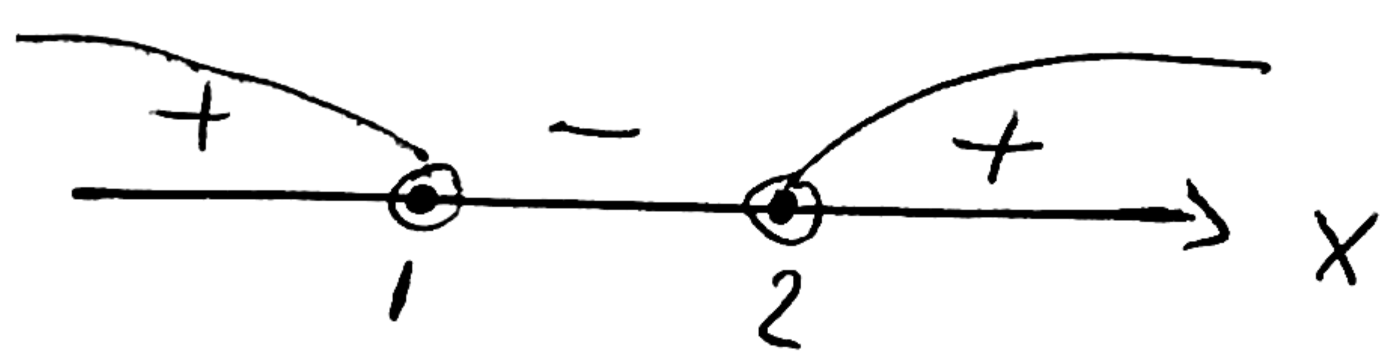
Ответ: $\{28\}$.

(3.) $\dfrac{-x^3+2x^2+x-1}{2-x}<x^2 \Leftrightarrow \dfrac{-x^3+2x^2+x-1}{2-x}-x^2<0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{\cancel{-x^3}+\cancel{2x^2}+x-1-\cancel{2x^2}+\cancel{x^3}}{2-x}<0 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x-2}>0$

Исследуем знак данной функции:

$\operatorname{sign}\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)$



Т.о. данная функция строго больше нуля на объединении двух лучей: $x\in(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$.

Ответ: $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$.

(4.) $\lg(3x-1)-\frac{1}{2}\lg(x+1)=\frac{1}{2}\lg(x+13)$.

$D:\begin{cases} 3x-1>0 \\ x+1>0 \\ x+13>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\frac{1}{3} \\ x>-1 \\ x>-13 \end{cases} \Leftrightarrow \underline{x>\frac{1}{3}}.$

Преобразуем данное уравнение:

$2\lg(3x-1)=\lg(x+13)+\lg(x+1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lg(3x-1)^2=\lg(x+13)(x+1) \Leftrightarrow \lg(9x^2+1-6x)=$

$=\lg(x^2+14x+13)$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 10629

Т.к. $f(x) = \lg x$ – функция, монотонно возрастающая на луче $(0;+\infty)$, то равенство логарифмов равносильно равенству аргументов:
Т.о. имеем равенство:

$$9x^2-6x+1 = x^2+14x+13 \Leftrightarrow 8x^2-20x-12=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-5x-3=0 \Leftrightarrow x = \frac{5\pm\sqrt{25+24}}{4} = \frac{5\pm 7}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-\frac{1}{2} \; (\notin D) \end{array}\right.$$

Ответ: $\{3\}$.

5. $\left(\frac{1}{9}\right)^{x+1} > \left(\frac{1}{3}\right)^{2x^2-8x+14} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{2x+2} > \left(\frac{1}{3}\right)^{2x^2-8x+14}$

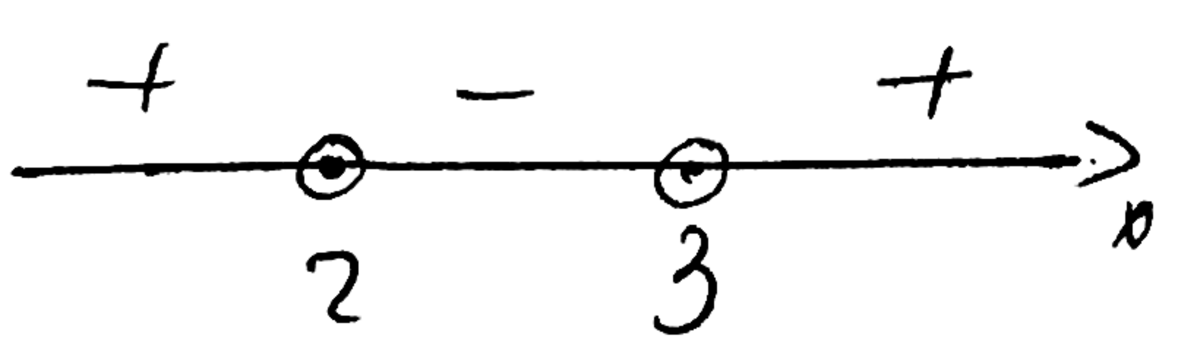
Функция $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ – монотонно убывающая функция на $\mathbb{R}$. Т.о. ~~[illegible]~~ данное неравенство $(f(2x+2) > f(2x^2-8x+14))$ равносильно неравенству аргументов со сменой знака:

$$2x^2-8x+14 > 2x+2 \Leftrightarrow 2x^2-10x+12>0 \Leftrightarrow x^2-5x+6>0 \Leftrightarrow$$

$$\left| x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=2 \end{array}\right. (\text{по т. Виета}) \right| \Leftrightarrow (x-2)(x-3)>0.$$

Исследуем знак данной функции:

$\operatorname{sign}(x^2-5x+6)$



Т.о. данная функция принимает значения больше 0 на объединении 2-х лучей: $x \in (-\infty;2)\cup(3;+\infty)$.

Ответ: $(-\infty;2)\cup(3;+\infty)$.

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 10629

(6) Пусть x - это количество изготовленных электродвигателей типа А;
y - это количество изготовленных электродвигателей типа В.
Тогда $2x$ - это количество (в кг.) меди, понадобившееся для производства данных двигателей типа А, $3y$ - кол-во (в кг) меди, понадобившееся для производства двигателей типа В.
Из условия известно, что $2x+3y=146$ (кг)
$4x$ - кол-во (в кг) свинца, потребовавшееся для изготовления двигателей типа А; $5y$ - кол-во (в кг) свинца, потребовавшееся для изготовления двигателей типа В. Из условия известно, что $4x+5y=258$ (кг).

Т.о. имеем систему:

$$\begin{cases} 2x+3y=146 \text{ (кг)} \mid \cdot 2 \\ 4x+5y=258 \text{ (кг)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+6y=292 \text{ (кг)} \\ 4x+5y=258 \text{ (кг)} \end{cases} - \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=34 \\ x=\dfrac{258-5\cdot 34}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=34 \\ x=\dfrac{258-170}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=34 \\ x=22 \end{cases}$$

т.о. Ответ: 22 электродвигателя типа А и 34 электродвигателя типа В.

(7.) Сумма членов арифметической прогрессии ищется по формуле $S=\dfrac{(a_1+a_n)}{2}\cdot n$, где S - искомая сумма; a_1 и a_n - первый и n-ый члены последовательности соответственно; n - кол-во членов последовательности;

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 10629

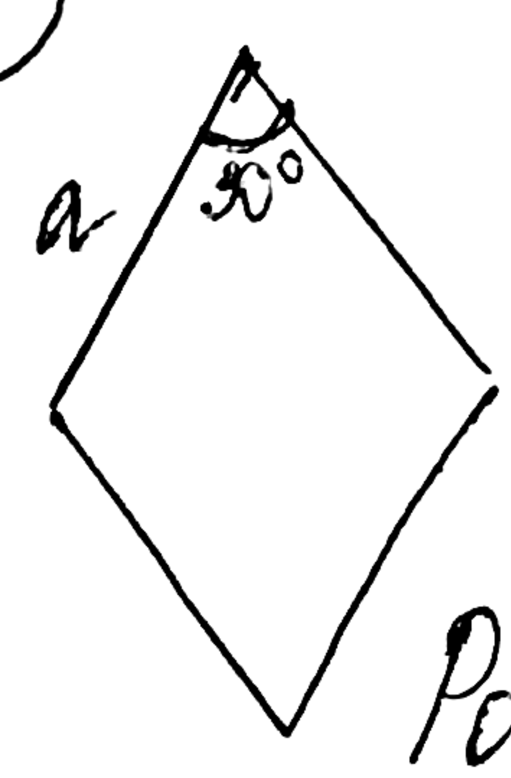
С тем значением, что мы имеем:

$S = 36$; $a_1 = 4$; $a_n = 5$; n - ?

$36 = \frac{(4+5)}{2} \cdot n \Leftrightarrow 9n = 72 \Leftrightarrow n = 8$ +

Ответ: 8.

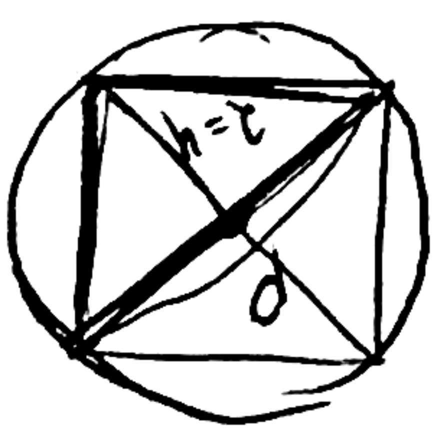
8.



Пусть сторона данного ромба равна a, тогда, по формуле нахождения площади параллелограмма: $S = \sin\alpha \cdot a \cdot a = \frac{1}{2} \cdot a^2$

Радиус вписанной в ромб окружности можно найти по формуле: $r = \frac{S}{p} = \frac{\frac{1}{2}a^2}{2a} = \frac{a}{4}$;

Рассмотрим данную окружность и вписанный в нее квадрат: +



Длина диагонали квадрата равна длине диаметра окружности. Площадь квадрата найдём как сумму площадей 2-х треугольников (равнобедренных), с основанием - диагональю квадрата, высотой - радиусом окружности (см. рис.)

$S_{\square} = 2S_{\triangle} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot r \cdot d = \frac{a}{4} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{8}$

$\frac{S_{\diamond}}{S_{\square}} = \frac{\frac{1}{2}a^2}{\frac{1}{8}a^2} = 4$; $S_{\diamond} : S_{\square} = 4:1$.

Ответ: 4:1.

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 10629

9. $\begin{cases} \sin x + \cos y = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (*) \\ x + y = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$.

Очевидно решением является множество точек вида $\{(\frac{\pi}{3}+2\pi k; \frac{\pi}{3}+2\pi k) \mid k \in Z\}$.

$y = \frac{2\pi}{3} + x$

$\cos y = \cos(\frac{2\pi}{3} - x) = \cos\frac{2\pi}{3}\cos x + \sin\frac{2\pi}{3}\sin x = -\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x.$

$(*)$ $(1+\frac{\sqrt{3}}{2})\sin x - \frac{1}{2}\cos x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow (2+\sqrt{3})\sin x - \cos x = 1+\sqrt{3}$

Постр. корни: $x+y=\frac{2\pi}{3}$

...

Ответ: $\{(\frac{\pi}{3}+2\pi k; \frac{\pi}{3}+2\pi k) \mid k \in Z\}$.

10. Пусть $\sqrt[3]{40+\sqrt{1573}} + \sqrt[3]{40-\sqrt{1573}} = \alpha$.

Возведем данное равенство в куб:

$40+\sqrt{1573} + 3\sqrt[3]{(40+\sqrt{1573})(\underbrace{1600-1573}_{27})} + 3\sqrt[3]{(40-\sqrt{1573})(\underbrace{1600-1573}_{27})}$
$+ 40 - \sqrt{1573} = \alpha^3 \Leftrightarrow$

$-\alpha^3 + 9(\underbrace{\sqrt[3]{40+\sqrt{1573}} + \sqrt[3]{40-\sqrt{1573}}}_{\alpha}) + 80 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha^3 - 9\alpha - 80 = 0.$

Если данное уравнение будет иметь рациональный корень, то он будет содержаться в множестве: $\{-1; -2; -4; -8; -10; -20; -40; -80; 80; 40; 20; 10; 8; 4; 2; 1; 5; -5\}$.

По схеме Горнера проверим число 5.

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 10629

0	-9	-80
5	16	0

т.о. $\alpha^3-9\alpha-80=$

$=(\alpha-5)(\alpha^2+5\alpha+16)=0$

$D<0.$

$=5$ - единственный корень уравнения

$^3-9\alpha-80=0$. (т.к. это уравнение было

олучено возведением числа $\sqrt[3]{40+\sqrt{1573}}+$

$+\sqrt[3]{40-\sqrt{1573}}$ в куб), то имеем следующее

равенство).

$\sqrt[3]{40+\sqrt{1573}}+\sqrt[3]{40-\sqrt{1573}}=\alpha=5.$

Ответ. 5.