ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

ШИФР 14184

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

Дисциплина	МАТЕМАТИКА
Фамилия	МИРОШНИК
Имя	СЕРГЕЙ
Отчество	АЛЕКСЕЕВИЧ
№ школы	ЛИЦЕЙ ПРИ ТПУ
Населенный пункт	ТОМСК
Номер варианта	6

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 14184

Класс 11 Вариант 6 Дата Олимпиады 11.02.2017

Площадка написания ТПУ

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Прописью	Подпись
Оценка	4?	5	5	5	10	5	0	15	15	20?	84	восемьдесят четыре	

1) $(x^2+2x+2)(x^2+2x-2)=5$

$(x^2+2x)^2-4=5$

$\left[\begin{array}{l} x^2+2x=5 \\ x^2+2x=-5 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x^2+2x-5=0 \\ x^2+2x+5=0 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=5 \\ D<0 \\ \text{ден} \end{array}\right.$?

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=5 \end{array}\right.$

2) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-5}=2\sqrt{x}$ ОДЗ: $x \geq 5$

$2x+1+x-5+2\sqrt{(2x+1)(x-5)}=4x$

$2\sqrt{(2x+1)(x-5)}=x+2$

ОДЗ ≥ 0

$4(2x^2+x-6x-5)=x^2+4x+4$

$8x^2-20x-12=x^2+4x+4$

$7x^2-24x-16=0$

$D_1=144+16\cdot 7=256$

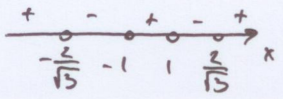
$\left[\begin{array}{l} x_1=\frac{12-16}{7}<0 \neq \text{ОДЗ} \\ x_2=\frac{12+16}{7}=4 \end{array}\right.$

Ответ: $x=4$ ✓

3) $\frac{x^2-2}{x^2-1}<-2$

$\frac{x^2-2+2x^2-2}{x^2-1}<0$

$\frac{3x^2-4}{x^2-1}<0$ $\frac{(\sqrt{3}x-2)(\sqrt{3}x+2)}{(x-1)(x+1)}<0$



$x \in \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}; -1\right) \cup \left(1; \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ ✓

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c = a(bc)$ $E = mc^2$

ШИФР 14184

4) $\log_4(2x+3) + \log_4(x-1) = 2 - \log_4\left(\frac{16}{5}\right)$ ОДЗ: $x > 1$

$\log_4((2x+3)(x-1)) = \log_4 16 - \log_4 \frac{16}{5}$

$\log_4(2x^2+3x-2x-3) = \log_4 5$

$2x^2 + x - 3 = 5$

$2x^2 + x - 8 = 0$

$D = 1 + 8 \cdot 8 = 49$

$x_1 = \frac{-1-7}{4} < 0 \notin$ ОДЗ

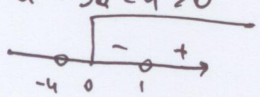
$x_2 = \frac{-1+7}{4} = 1{,}5$

Ответ: $x = 1{,}5$ ✓

5) $4^x \geq 4 - 3 \cdot 2^x$

$2^x = a > 0$

$a^2 + 3a - 4 > 0$



$a \in (1; +\infty) \Rightarrow 2^x \in (1; +\infty)$

$x \in (0; +\infty)$ ✓

6) A: 4x человек по плану ; 4x+4 - по факту

B: 3x человек по плану ; 3x+5 - по факту

C: 6x человек по плану ; 6x+6 - по факту

$4+5+6 = \frac{7\frac{9}{13}(4x+3x+6x)}{100}$

$1500 = \frac{13 \cdot 7 + 9}{13} \cdot 13x$

$1500 = \frac{13 \cdot 7 + 9}{13} \cdot 13x$

$1500 = 100 \cdot x$

$x = 13$?

$x = 15$

A: $4 \cdot 13 + 4 = 56$

B: $3 \cdot 13 + 5 = 44$

C: $6 \cdot 13 + 6 = 84$

Ответ: A - 56

B - 44

C - 84 человека.

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$ $\frac{n}{n-k}C_n^k$

ШИФР 14184

7) $\begin{cases} a_5+a_9=6 \\ a_5=a_1+4d \\ a_9=a_1+8d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_1+12d=6 \\ a_1=1 \end{cases} \Rightarrow 12d=4$, $d=\frac{1}{3}$

См. условие! Геом. прогрессия!

$a_{13}=a_1+12d=1+4=5$

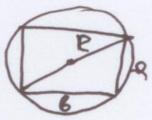
$S_{1+13}=\frac{(a_1+a_{13})\cdot 13}{2}=\frac{(1+5)\cdot 13}{2}=3\cdot 13=39$

Где эти преобразования?

б) $\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}+\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=\sqrt[3]{(\sqrt{2}+2)^3}+\sqrt[3]{(2-\sqrt{2})^3}=\sqrt{2}+2+2-\sqrt{2}=4$

в) $S_{кр}=\pi R^2$

$S_{пр}=\frac{\pi R^2}{2}=ab$



$\begin{cases} a^2+b^2=(2R)^2 \\ ab=\frac{\pi R^2}{2} \end{cases}$ $a=\frac{\pi R^2}{2b}$

$\frac{\pi^2R^4}{4b^2}+b^2=4R^2$

$\pi^2R^4+4b^4-16b^2R^2=0$

$D_1=64R^4-4\pi^2R^4=4R^4(16-\pi^2)$

$b^2=\frac{8R^2\pm 2R^2\sqrt{16-\pi^2}}{4}=R^2\left(2\pm\frac{\sqrt{16-\pi^2}}{2}\right)$

$a^2=4R^2-R^2\left(2\pm\frac{\sqrt{16-\pi^2}}{2}\right)=R^2\left(2\mp\frac{\sqrt{16-\pi^2}}{2}\right)$

Т.к. a и b – стороны прямоугольника, то они больше нуля $\Rightarrow$ на ОДЗ

$\Rightarrow b=R\sqrt{2\pm\frac{\sqrt{16-\pi^2}}{2}}$

$a=R\sqrt{2\mp\frac{\sqrt{16-\pi^2}}{2}}$

Т.к. начальные ур-я симметричны для a и b, то замена $(a;b)$ на $(b;a)$ ничего не изменит $\Rightarrow$ можно избавиться от неопределенного знака

$\Rightarrow b=R\sqrt{2+\frac{\sqrt{16-\pi^2}}{2}}=10\sqrt{2+\frac{\sqrt{16-\pi^2}}{2}}$

$a=10\sqrt{2-\frac{\sqrt{16-\pi^2}}{2}}$

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

ШИФР 14184

3) $\begin{cases}\sin x+\cos y=\frac{1-\sqrt{3}}{2}\\ \sin x\cos y=-\frac{\sqrt{3}}{4}\end{cases}$ $\left|\begin{cases}a+b=\frac{1-\sqrt{3}}{2}\\ ab=-\frac{\sqrt{3}}{4}\end{cases}\right.$ $\begin{cases}a^2+2ab+b^2=\frac{2-\sqrt{3}}{2}\\ a+b<0\\ 2ab=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ $\begin{cases}a^2+b^2=1-\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\ a+b<0\\ 2ab=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$

$\sin x \overset{\text{обз}}{=} a$

$\cos y \overset{\text{обз}}{=} b$

$\begin{cases}a^2+b^2=1\\ a+b<0\\ ab=-\frac{\sqrt{3}}{4}\end{cases}$

$a=-\frac{\sqrt{3}}{4b}$

$\frac{3}{16b^2}+b^2=1$

$3+16b^4-16b^2=0$

$D_1=64-48=16$

$\begin{cases}b^2=\frac{8+4}{16}=\frac{3}{4}\\ b^2=\frac{8-4}{16}=\frac{1}{4}\end{cases}$

$\begin{cases}b_1=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ b_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ b_3=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ b_4=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ $\begin{cases}a_1=-\frac{1}{2}\\ a_2=\frac{1}{2}\\ a_3=-\frac{\sqrt{6}}{4}\\ a_4=\frac{\sqrt{6}}{4}\end{cases}$

$a_1+b_1=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}>0$ $\}$ - не подходит

$a_2+b_2=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}<0$ - подходит

$a_3+b_3=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{4}=\frac{\sqrt{8}-\sqrt{6}}{4}>0$ $\}$ - не подходит

$a_4+b_4=\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}<0$ - подходит

$\begin{cases}\begin{cases}\sin x_1=\frac{1}{2}\\ \cos y_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}\sin x_2=\frac{\sqrt{6}}{4}\\ \cos y_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}\end{cases}$ $\begin{cases}\begin{cases}x_1=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z\\ y_1=\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z\end{cases}\\ \begin{cases}x_2=(-1)^k\arcsin\frac{\sqrt{6}}{4}+\pi k,\ k\in Z\\ y_2=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z\end{cases}\end{cases}$

Ответ: $\left((-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k;\ \pm\frac{5\pi}{6}+2\pi n\right),\ n;k\in Z$

$\left((-1)^k\arcsin\frac{\sqrt{6}}{4}+\pi k;\ \pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n\right),\ n,k\in Z$