ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

ШИФР 5041

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

Дисциплина	МАТЕМАТИКА

Фамилия	ОБУХОВ
Имя	ПЁТР
Отчество	КИРИЛЛОВИЧ

№ школы	ЛИЦЕЙ №2
Населенный пункт	г. БРАТСК

Номер варианта	006

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 5041

Класс 11 Вариант 6 Дата Олимпиады 11.02.2017г

Площадка написания ТПУ

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	5	5	5	5	10	10	9	15	5	20	89	восемьдесят девять	Шилкин

№1) $(x^2+2x+2)(x^2+2x-2)=5$

Пусть $x^2+2x-2=t$

$(t+4)\cdot t=5$

$t^2+4t-5=0$

$a=1;\ b=4;\ c=-5$

$a+b+c=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_1=1 \\ t_2=-5 \left(\frac{c}{a}\right) \end{array}\right.$ По свойству коэффициентов.

Обратная замена

$x^2+2x-2=1$

$x^2+2x-3=0$

$a=1;\ b=2;\ c=-3$

$a+b+c=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=1 \\ x_2=-3 \end{array}\right.$ По св. коэфф.

или $x^2+2x-2=-5$

$x^2+2x+5=0$

$D=k^2-ac=1-5=-4,\ D<0 \Rightarrow$ корней нет.

Ответ: $-3;\ 1$

№2) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}=2\sqrt{x}$

ОДЗ: $\begin{cases} 2x+1\geq 0 \\ x-3\geq 0 \\ x\geq 0 \end{cases} \begin{cases} x\geq -\frac{1}{2} \\ x\geq 3 \\ x\geq 0 \end{cases} \Rightarrow x\geq 3.$

$2x+1+2\sqrt{2x^2-5x-3}+x-3=4x$

$2\sqrt{2x^2-5x-3}=x+2$

$4(2x^2-5x-3)=x^2+4x+4.$

$8x^2-20x-12=x^2+4x+4.$

$7x^2-24x-16=0$

$D=k^2-ac=144+112=256,\ D>0,$ 2 корня.

$x_1=\frac{12+16}{7}=4$

$x_2=\frac{12-16}{7}=-\frac{4}{7},\ -\frac{4}{7}\notin$ ОДЗ

Ответ: 4

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ШИФР 5041

№3) $\frac{x^2-2}{x^2-1} < -2 \quad | \cdot (x^2-1)$

ОДЗ: $x^2-1 \neq 0$.
$x \neq \pm 1$

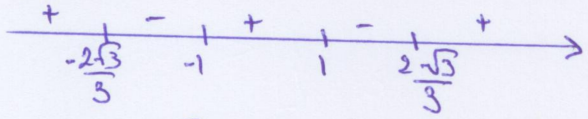
$\frac{x^2-2}{x^2-1} + \frac{2(x^2-1)}{x^2-1} < 0$.

$\frac{x^2-2+2x^2-2}{x^2-1} < 0$

$\frac{3x^2-4}{x^2-1} < 0$

$(3x^2-4)(x^2-1) < 0$

$(\sqrt{3}x-2)(\sqrt{3}x+2)(x+1)(x-1) < 0$



$x \in (\frac{2\sqrt{3}}{3}; +\infty)$
$x = 10$

$(10\sqrt{3}-2)(10\sqrt{3}+2)(10+1)(10-1) > 0$

Ответ: $x \in (-\frac{2\sqrt{3}}{3}; -1) \cup (1; \frac{2\sqrt{3}}{3})$ ✓

№4) $\log_4(2x+3) + \log_4(x-1) = 2 - \log_4(\frac{16}{3})$

ОДЗ: $\begin{cases} 2x+3>0 \\ x-1>0 \end{cases} \begin{cases} x > -\frac{3}{2} \\ x > 1 \end{cases} \Rightarrow x > 1$

$\log_4(2x^2+x-3) + \log_4(\frac{16}{3}) = 2$.

$\log_4(\frac{16}{3} \cdot (2x^2+x-3)) = 2$.

$\frac{16}{3} \cdot (2x^2+x-3) = 16 \quad | \cdot \frac{3}{16}$

$2x^2+x-3 = 3$
$2x^2+x-6 = 0$
$D = b^2-4ac = 1+48 = 49$, $D>0$, 2 корня
$x_1 = \frac{-1+7}{4} = 1,5$
$x_2 = \frac{-1-7}{4} = -2$, $-2 \notin$ ОДЗ
Ответ: 1,5

№5) $4^x > 4 - 3 \cdot 2^x$
$2^{2x} + 3 \cdot 2^x - 4 > 0$
Пусть $2^x = a$, $a > 0$

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ШИФР 5041

$a^2+3a-4>0$

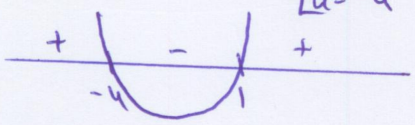
$y=a^2+3a-4=(a-1)(a+4)$

Нули функции

$a^2+3a-4=0$

$a=1;\ b=3;\ c=-4$

$a+b+c=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a_1=1 \\ a=-4 \end{array}\right.$



$\begin{cases} a \in (-\infty;-4) \cup (1;+\infty) \\ a>0 \end{cases} \Rightarrow a \in (1;+\infty)$

Обратная замена

$2^x>1$

$2^x>2^0 \quad 2>1 \Rightarrow f(x)=2^x$ - возрастающая функция на всей своей области определения

$x>0$

Ответ: $x>0$ ✓

	План	Действ
Спец. A	$4x$	$4x+4$
Спец. B	$3x$	$3x+5$
Спец. C	$6x$	$6x+6$
Всего	$13x$	$13x+15$
Процент	100%	$107\frac{9}{13}\%$

Пусть x - одна часть. Тогда по плану спец. A - $4x$, спец. B - $3x$, спец C - $6x$.

Составляем и решаем уравнение

$$\frac{13x}{13x+15}=\frac{100}{107\frac{9}{13}}$$

$$107\frac{9}{13}\cdot 13x=1300x+1500$$

$$\frac{1400\cdot 13x}{13}=1300x+1500$$

$$1400x-1300x=1500$$

$$100x=1500$$

$$x=15$$

На спец. A приняли: $4\cdot 15+4=64$ чел

На спец. B приняли: $3\cdot 15+5=50$ чел

На спец. C требовали: $6\cdot 15+6=96$ чел

Ответ: A-64; B-50; C-96.

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(a \cdot b)c = a(bc)$ $E = mc^2$

ШИФР 5041

№7) $b_1 = 1$

$b_5 + b_8 = 6$

$b_1 \cdot q^4 + b_1 \cdot q^8 = 6$

$q^4 + q^8 = 6$

$q^8 + q^4 - 6 = 0$

Пусть $q^4 = t$, $t \geq 0$

$t^2 + t - 6 = 0$

$D = b^2 - 4ac = 1 + 24 = 25$, $D > 0$, 2 корня

$t_1 = \frac{-1+5}{2} = 2$

$t_2 = -\frac{1+5}{2} = -3$, $-3 \notin ОДЗ$

Обратная замена

$q^4 = 2$

$q = \pm\sqrt[4]{2}$

1. Если $q = \sqrt[4]{2}$, то

$S_{13} = 1 + 2^{\frac{1}{4}} + 2^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{3}{4}} + 2^{\frac{5}{4}} + 2^{\frac{3}{2}} + 2^{\frac{7}{4}} + 2^{\frac{9}{4}} + 2^{\frac{5}{2}} + 2^{\frac{11}{4}} + 8 = 15 + 7\sqrt{2} + 7\sqrt[4]{2} + 7\sqrt[4]{8}$

не знаем дробей

2. Если $q = -\sqrt[4]{2}$, то

$S_{13} = 1 - 2^{\frac{1}{4}} + 2^{\frac{1}{2}} - 2^{\frac{3}{4}} + 2 - 2^{\frac{5}{4}} + 2^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{7}{4}} + 4 - 2^{\frac{9}{4}} + 2^{\frac{5}{2}} - 2^{\frac{11}{4}} + 8 = 15 + 7\sqrt{2} - 7\sqrt[4]{2} - 7\sqrt[4]{8}$

Ответ: $15 + 7\sqrt{2} + 7\sqrt[4]{2} + 7\sqrt[4]{8}$ или $15 + 7\sqrt{2} - 7\sqrt[4]{2} - 7\sqrt[4]{8}$

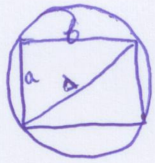
№8) $S_{кр} = \pi r^2 = 100\pi$

$S_{пр} = a \cdot b$.

2. $S_{пр} = S_{кр}$

$S_{пр} = 50\pi$

$a \cdot b = 50\pi$



$d^2 = a^2 + b^2$

$(2r)^2 = a^2 + b^2$

$400 = a^2 + b^2$

Составляем систему.

$\begin{cases} a \cdot b = 50\pi & | \cdot 2 \\ a^2 + b^2 = 400 \end{cases} + \begin{cases} 2ab = 100\pi \\ a^2 + b^2 = 400 \end{cases}$

$a^2 + 2ab + b^2 = 100(\pi + 4)$

$(a + b)^2 = 100(\pi + 4)$

$a + b = \pm 10\sqrt{\pi + 4}$ ($a + b$) не может быть < 0, т.к. это стороны фигуры.

$a + b = 10\sqrt{\pi + 4}$

$a = 10\sqrt{\pi + 4} - b$.

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 5041

№8 Продолжение)

Подставим "а" в первое выражение, получим:

$(10\sqrt{\Pi+4} - b)\cdot b = 5\Pi$

$-b^2 + 10\sqrt{\Pi+4}\,b = 5\Pi$

$b^2 - 10\sqrt{\Pi+4}\,b + 5\Pi = 0$

$D = k^2 - ac = 25\Pi + 100 - 5\Pi = 100 - 25\Pi = 25(4-\Pi)$, $D>0$, 2 корня

$b_1 = 5\sqrt{4+\Pi} + 5\sqrt{4-\Pi}$

$b_2 = 5\sqrt{4+\Pi} - 5\sqrt{4-\Pi}$

$\begin{cases} b = 5\sqrt{4+\Pi} + 5\sqrt{4-\Pi} \\ a = 5\sqrt{4+\Pi} - 5\sqrt{4-\Pi} \end{cases}$ или $\begin{cases} b = 5\sqrt{4+\Pi} - 5\sqrt{4-\Pi} \\ a = 5\sqrt{4+\Pi} + 5\sqrt{4-\Pi} \end{cases}$

Ответ: $5\sqrt{4+\Pi} + 5\sqrt{4-\Pi}$ и $5\sqrt{4+\Pi} - 5\sqrt{4-\Pi}$

№9) $\begin{cases} \sin x + \cos y = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ \sin x \cdot \cos y = -\frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$

Решим аналитически

Данные равенства из ~~него~~ системы выполняются когда либо: Почему? А если еще как?

$\begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ \cos y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \frac{\Pi}{6} + 2\Pi n \\ x = \frac{5\Pi}{6} + 2\Pi n \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} y = \frac{5\Pi}{6} + 2\Pi n \\ y = -\frac{5\Pi}{6} + 2\Pi n \end{array}\right. \end{cases}$ n везде $\in N$

либо:

$\begin{cases} \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos y = \frac{1}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\Pi}{3} + 2\Pi n \\ x = -\frac{2\Pi}{3} + 2\Pi n \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} y = \frac{\Pi}{3} + 2\Pi n \\ y = -\frac{\Pi}{3} + 2\Pi n \end{array}\right. \end{cases}$ n везде $\in N$

Ответ: $(\frac{\Pi}{6}+2\Pi n; \frac{5\Pi}{6}+2\Pi n)$; $(\frac{\Pi}{6}+2\Pi n; -\frac{5\Pi}{6}+2\Pi n)$; $(\frac{5\Pi}{6}+2\Pi n; \frac{5\Pi}{6}+2\Pi n)$; $(\frac{5\Pi}{6}+2\Pi n; -\frac{5\Pi}{6}+2\Pi n)$; $(-\frac{\Pi}{3}+2\Pi n; \frac{\Pi}{3}+2\Pi n)$; $(-\frac{\Pi}{3}+2\Pi n; -\frac{\Pi}{3}+2\Pi n)$; $(-\frac{2\Pi}{3}+2\Pi n; \frac{\Pi}{3}+2\Pi n)$; $(-\frac{2\Pi}{3}+2\Pi n; -\frac{\Pi}{3}+2\Pi n)$

№10) $\sqrt[3]{20+\sqrt{392}} + \sqrt[3]{20-\sqrt{392}} = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} = \sqrt[3]{(2+\sqrt{2})^3} + \sqrt[3]{(2-\sqrt{2})^3} =$

$= 2+\sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 4$

$20+14\sqrt{2} = (2+\sqrt{2})^3$

$20-14\sqrt{2} = (2-\sqrt{2})^3$ (Можно убедиться возведя в куб)

Ответ: 4.