

Бланк олимпиадной работы

Класс 10 Вариант 31 Дата Олимпиады 12.02.2023

Площадка написания КНИТУ

ОЦЕНКА

(заполняется проверяющим)

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	10	15	0	20	0					50	пятьдесят	

① $\frac{a^2}{3} - \frac{3}{a^2} = 4 \Rightarrow \frac{a^4 - 9}{3a^2} = 4 \Rightarrow \frac{(a^2 - 3)(a^2 + 3)}{3a^2} = 4$

$$\frac{a^{12} - 81}{27a^6} = \frac{(a^6 - 27)(a^6 + 27)}{27a^6} = \frac{(a^2 - 3)(a^4 + 3a^2 + 9)(a^2 + 3)(a^4 - 3a^2 + 9)}{(3a^2)^3}$$

Заменим $\frac{(a^2 - 3)(a^2 + 3)}{3a^2}$ на 4: $4 \cdot \frac{(a^4 + 3a^2 + 9)(a^4 - 3a^2 + 9)}{9a^4} =$

$$= 4 \frac{a^8 + 9a^4 + 81}{9a^4} = 4 \left(\frac{a^4}{9} + 1 + \frac{9}{a^4} \right)$$

$\frac{a^2}{3} - \frac{3}{a^2} = 4$ возведем в квадрат: $\frac{a^4}{9} - 2 \cdot \frac{a^2}{3} \cdot \frac{3}{a^2} + \frac{9}{a^4} = 16$.

$\frac{a^4}{9} + \frac{9}{a^4} = 18$. подставим в выражение: $4(18 + 1) = 4 \cdot 19 = 76$.

Ответ: 76.

③ $4x - x^2 + \sqrt{(9 - x^2)(-x^2 + 8x - 7)} = 7$.

Реш:

$$(9 - x^2)(-x^2 + 8x - 7) \geq 0 \Rightarrow (3 - x)(3 + x)(x - 1)(x - 7) \geq 0$$

$D = 64 - 28 = 36$.

$x_1 = \frac{-8 + 6}{-2} = 1$

$x_2 = \frac{-8 - 6}{-2} = 7$.

$x \in (-\infty; -3] \cup [1; 3] \cup [7; +\infty)$

Бланк олимпиадной работы

$-x^2 + 4x - 7 = \sqrt{(9 - x^2)(-x^2 + 8x - 7)}$ возведем все в квадрат
 $x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 4x^3 + 16x^2 - 28x + 7x^2 - 28x + 49 = x^4 - 8x^3 + 30x^2 - 56x + 49$
 $x^4 - 8x^3 + 30x^2 - 56x + 49 = x^4 - 8x^3 - 2x^2 + 72x - 63$

$32x^2 - 128x + 112 = 0 \cdot :16 \quad D = 64 - 56 = 8.$

$2x^2 - 8x + 7 = 0. \quad x_{1,2} = \frac{8 \pm 2\sqrt{2}}{4} = \frac{4 \pm \sqrt{2}}{2}$

Ответ: $x = \frac{4 \pm \sqrt{2}}{2}$

5) $(k^2 - 3k - 10)x^2 + (3k - 8)x + 2 = 0.$

$D = 9k^2 - 48k + 64 - 8(k^2 - 3k - 10) = k^2 - 24k + 144 = (k - 12)^2$

$x_1 = \frac{-3k + 8 + k - 12}{2k^2 - 6k - 20} = \frac{-2k - 4}{2k^2 - 6k - 20} = \frac{-k - 2}{k^2 - 3k - 10} = \frac{-(k+2)}{(k-5)(k+2)} = -\frac{1}{(k-5)}$

Разложим $k^2 - 3k - 10$:

$D = 9 + 40 = 49.$

$k_1 = \frac{3+7}{2} = 5$

$k_2 = \frac{3-7}{2} = -2$

$x_2 = \frac{-3k + 8 - k + 12}{2k^2 - 6k - 20} = \frac{-4k + 20}{2k^2 - 6k - 20} = \frac{-2k + 10}{k^2 - 3k - 10} = \frac{-2(k-5)}{(k-5)(k+2)} = -\frac{2}{k+2}$

т.н. по условию $x_1 \leq 2x_2 \Rightarrow$

$-\frac{1}{k-5} \leq 2 \cdot \left(-\frac{2}{k+2}\right) \quad \frac{4}{k+2} - \frac{1}{k-5} \leq 0.$

$-\frac{1}{k-5} \leq -\frac{4}{k+2}$

$\frac{4k - 20 - k - 2}{(k+2)(k-5)} \leq 0 \quad \frac{3k - 22}{(k+2)(k-5)} \leq 0.$



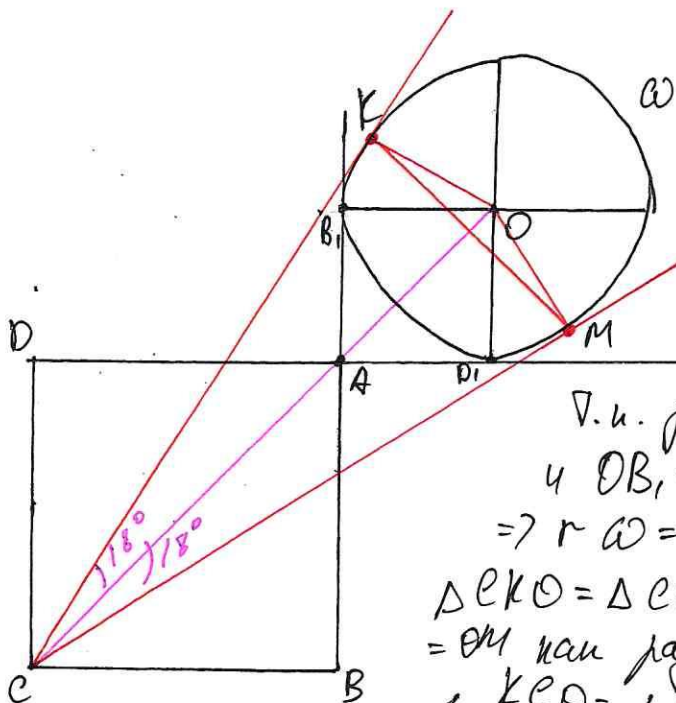
т.н. изначально $k \in [6; 10]$ (линия отрезка 4), а для условия $x_1 \leq 2x_2$ $k \in [6; \frac{22}{3}]$

(линия отрезка $\frac{1}{3}$), по вероятности того, что k попадет под условие = $\frac{\frac{1}{3}}{4} = \frac{\frac{4}{3}}{4} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

Ответ: $\frac{1}{3}$

Бланк олимпиадной работы

2



Дано: ABCD - квадрат;
 ω - окружность с центром O,
 касающаяся AB и AD в точках B₁ и D₁;
 $AB_1 = AD_1 = b - 2\sqrt{5}$; $\angle KCM = 36^\circ$;
 $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Найти: AB

Решение: Проведем OB₁ и OD₁.

Т.к. радиус перпендикулярен к секущей
 и $OB_1 = OD_1$ и $AB_1 = AD_1 \Rightarrow AB, OD_1$ - квадраты
 $\Rightarrow r_\omega = b - 2\sqrt{5}$. Проведем CO:

$\triangle KCO = \triangle OCM$ по 3м сторонам (CO - общ., OK =
 OM как радиусы, CK = CM - как кас.) $\Rightarrow$
 $\angle KCO = \angle OCM = \frac{36^\circ}{2} = 18^\circ$. Т.к. $OK \perp CK \Rightarrow$

$\triangle KCO$ - прямоугольный $\Rightarrow$ По теореме синусов $\frac{KO}{\sin 18^\circ} = \frac{CO}{\sin 54^\circ} \Rightarrow$
 $\Rightarrow CO = \frac{4(b-2\sqrt{5})}{\sqrt{5}-1}$ $CO = AC + AO$

AO - По теореме Пифагора, т.к. AO - диагональ AD, OB_1 :

$AO = \sqrt{2(b-2\sqrt{5})^2} = (b-2\sqrt{5}) \cdot \sqrt{2}$. Пусть $AB = x$, тогда AC, по теореме
 Пифагора, $= \sqrt{2x^2}$ $AC = CO - AO$. $\sqrt{2x^2} = \frac{4(b-2\sqrt{5})}{\sqrt{5}-1} - b\sqrt{2} + 2\sqrt{10}$

$$x = \frac{\sqrt{2} \left(\frac{4(b-2\sqrt{5})}{\sqrt{5}-1} - b\sqrt{2} + 2\sqrt{10} \right)}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot \frac{4(b-2\sqrt{5})}{\sqrt{5}-1}}{2} - \frac{12}{2} + \frac{2\sqrt{20}}{2} =$$

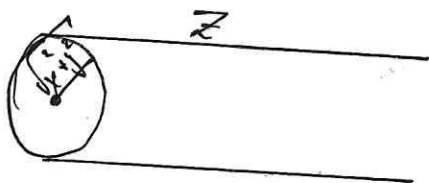
$$= \frac{2\sqrt{2}(b-2\sqrt{5})}{\sqrt{5}-1} - 6 + \sqrt{20} = \frac{(b-2\sqrt{5})(2\sqrt{2}-\sqrt{5}+1)}{\sqrt{5}-1} = \frac{(b-2\sqrt{5})(2\sqrt{2}-\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}+1)}{4}$$

Бланк олимпиадной работы

6) $\begin{cases} xy + z = 10 \\ xy + yz + xz = -22 \end{cases}$ возведем в квадрат $\begin{cases} x^2 + xy + xz + xy + y^2 + yz + xz + yz + z^2 = 100 \\ xy + yz + xz = -22 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + xz) = 100 \\ xy + yz + xz = -22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 144 \\ xy + yz + xz = -22 \end{cases}$

Изобразим конус:



Это конус, радиус основания которого = $\sqrt{x^2 + y^2}$, а высота - z