



ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E=mc^2$$



ШИФР

105903

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Бланк олимпиадной работы

Класс 9 Вариант 32 Дата Олимпиады 12.02.2023

Площадка написания КНИТУ, г. Казань, ул. Карла Маркса 68.

ОЦЕНКА

(заполняется проверяющим)

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	10	15	20	20	12					82	восемьдесят два	Ем

$$1) \frac{a}{3} - \frac{3}{a} = 4$$

$$\left\{ \frac{a^2 - 3^2}{3a} = 4 \right\}$$

$$2) \left(\frac{a^2 - 3^2}{3a} \right)^2 = 4^2$$

$$\frac{a^4 + 3^4}{(3a)^2} - 2 = 16$$

$$\left\{ \frac{a^4 + 3^4}{(3a)^2} = 18 \right\}$$

$$\text{ОДЗ: } a \neq 0$$

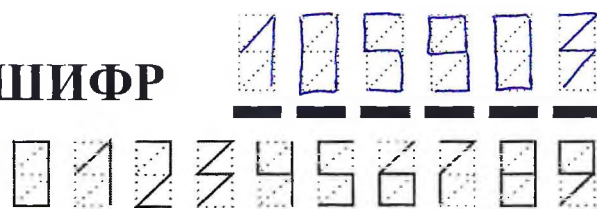
$$N 1.$$

$$3) \frac{a^2 - 6561}{81a^4} \cdot \frac{3a}{a^2 + 9} = \frac{a^2 - 3^8}{(3a)^4} \cdot \frac{3a}{a^2 + 9} =$$

$$= \frac{(a^4 - 3^4)(a^4 + 3^4)}{(3a)^3 \cdot (a^2 + 9)} = \frac{(a^2 - 3^2)(a^2 + 3^2)(a^4 + 3^4)}{(3a)^3 \cdot (a^2 + 3^2)} =$$

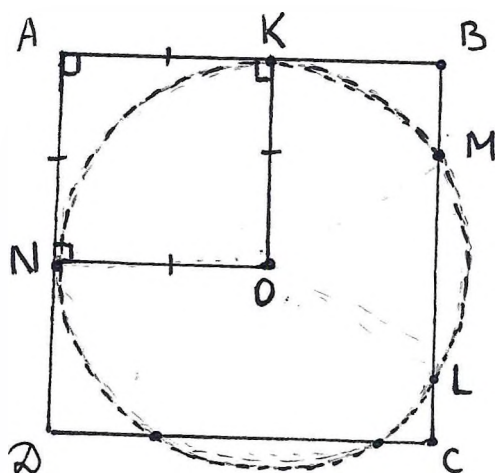
$$= \frac{a^2 - 3^2}{3a} \cdot \frac{a^4 + 3^4}{(3a)^2} = 4 \cdot 18 = 72$$

Ответ: 72.



Бланк олимпиадной работы

№ 2.



2). Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 = 4(4+y) \\ 10+x = 6+y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4+x \\ x^2 = 16+4y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 4+x \\ x^2 = 16+4(4+x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4+x \\ x^2 - 4x - 32 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 4+x \\ (x-8)(x+4) = 0 \end{cases} \Rightarrow x > 0 \Rightarrow x = 8$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 4+x \\ x = 8 \end{cases}$$

Ответ: 8 см.

- 1) Пусть K и N - т. касания окр. с центром в т. O радиусом 10, она пересекает сторону BC в т. M и L.
- 2) $\begin{cases} \angle NAK = 90^\circ \\ \angle AKO = 90^\circ \\ \angle ANO = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow AKON - \text{прям-ник.}$
- 3) $\begin{cases} AK = AN \\ AKON - \text{прям-ник} \end{cases} \Rightarrow AKON - \text{квадрат.}$
- 4) $OK = AK = 10 \text{ см}$
- 5) По усл. $BM = 4 \text{ см}$, $LC = 2 \text{ см}$, пусть $BK = x$, а $ML = y$.
- 6) Посчитаем степень точки B относ. данной окружности с двух сторон:
 $BK^2 = BM \cdot BL$, т.е.
 $x^2 = 4 \cdot (4+y)$
- 7) $AB = BC \Rightarrow 10+x = 4+y+2$, т.е.
 $10+x = 6+y$



$$E = mc^2$$



ШИФР



Бланк олимпиадной работы

№ 3

Пусть T - это кол-во всех тяжелых проб,
 Λ - кол-во всех легких проб,
 $M.C.$ - кол-во всех малосернистых проб,
 $B.C.$ - кол-во всех высокосернистых проб,
 $\Lambda.M.C.$ - кол-во всех легких малосернистых проб,
 $T.M.C.$ - кол-во всех тяжелых малосернистых проб,
 $\Lambda.B.C.$ - кол-во всех легких высокосернистых проб,
 $T.B.C.$ - кол-во всех тяжелых высокосернистых проб,
 n - кол-во проб.

По условию: $\frac{T}{n} = \frac{1}{9}$, т.е. $T = \frac{n}{9} \Rightarrow n \div 9$.

$$\frac{\Lambda.M.C.}{n} = \frac{11}{18}, \text{ т.е. } \Lambda.M.C. = \frac{11n}{18} \Rightarrow n \div 18$$

Т.к. $n \leq 200$ и делится на 18, то $n = 198$, тогда

$$T = \frac{n}{9} = \frac{198}{9} = 22,$$

$$\Lambda.M.C. = \frac{11n}{18} = \frac{11 \cdot 198}{18} = 121.$$

По усл. $T.M.C. = 0 \Rightarrow T.B.C. = T - T.M.C. = 22 - 0 = 22.$

$$\Lambda = n - T = 198 - 22 = 176, \text{ тогда } \Lambda.B.C. = \Lambda - \Lambda.M.C. = 176 - 121 = 55.$$

$$T.B.C. + \Lambda.B.C. = 22 + 55 = 77 \text{ проб.}$$

Ответ: 77 проб.

Бланк олимпиадной работы

№ 4.

$$x_n = \frac{x_{n-1} + 398x_n + x_{n+1}}{400}$$

$$400x_n = x_{n-1} + 398x_n + x_{n+1}$$

$$x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n+1}}{2} \Rightarrow \{x_n\} - \text{арифметическая последовательность}$$

$$x_n = x_1 + d(n-1), \quad d \neq 0.$$

$$\sqrt{\frac{x_{2023} - x_1}{2021} \cdot \frac{2022}{x_{2023} - x_1}} + 2021 = \sqrt{\frac{x_1 + 2022d - x_1 - d}{2021} \cdot \frac{2022}{x_1 + 2022d - x_1}} + 2021$$

$$= \sqrt{\frac{2021d}{2021} \cdot \frac{2022}{2022d}} + 2021 = 2022.$$

Ответ: 2022.

№ 5.

$$2022 \sqrt{x^3 - 4x - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^3} + 6} \leq 0, \quad \text{но} \quad 2022 \sqrt{x^3 - 4x - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^3} + 6} \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2022 \sqrt{x^3 - 4x - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^3} + 6} = 0.$$

$$x^3 - 4x - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^3} + 6 = 0$$

Пусть $x + \frac{1}{x} = t$, тогда $4x + \frac{4}{x} = 4t$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3x + \frac{3}{x}$$

$$t^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3t \Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = t^3 - 3t$$



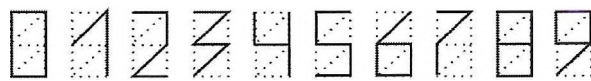
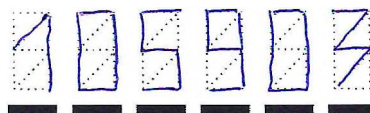
ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР



Бланк олимпиадной работы

$$t^3 - 3t - 4t + 6 = 0$$

$$t^3 - 7t + 6 = 0$$

$$(t-1)(t^2 + t - 6) = 0$$

$$(t-1)(t+3)(t-2) = 0$$

$$\begin{cases} t = 1 & ① \\ t = -3 & ② \\ t = 2 & ③ \end{cases}$$

$$①: t = 1$$

$$x + \frac{1}{x} = 1 \quad | \cdot x$$

$$x^2 + 1 = x$$

$$x^2 - x + 1 = 0$$

$$D = 1 - 4 < 0 \Rightarrow \text{нет корней}$$

$$②: t = -3$$

$$x + \frac{1}{x} = -3 \quad | \cdot x$$

$$x^2 + 1 = -3x$$

$$x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$D = 9 - 4 = 5$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$③: x + \frac{1}{x} = 2 \quad | \cdot x$$

$$x^2 + 1 = 2x$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x-1)^2 = 0$$

$$x = 1$$

$$③: x \neq 0$$

$$x \neq 0$$

$$\text{Ответ: } x \in \left\{ 1; \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}; \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \right\}.$$



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



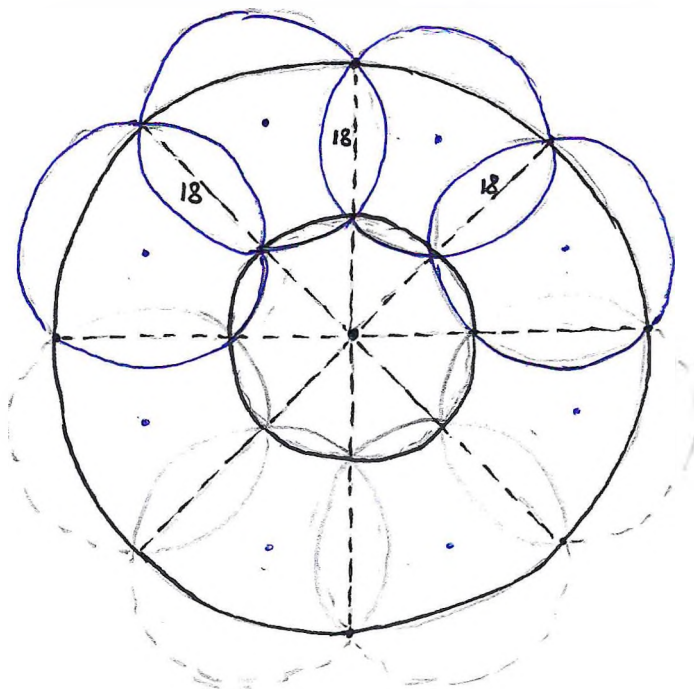
ШИФР



Бланк олимпиадной работы

№ 6

Радары должны быть расположены след. способом



Т.е. точки их пересечения между собой должны лежать на двух окружностях. Если бы центры окружностей располагались дальше относительно центра платформы кольцо будет покрыто не полностью. Если же подвинуть их ближе к центру платформы, то общая площадь покрытия увеличится, нам нужно найти максимальное расстояние до центров. Найдем это самое расстояние. Пусть x - радиус платформы. Найти: $OO_1 = ?$

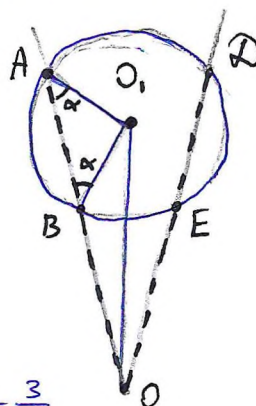
по т. косинусов для $\triangle AOB$:

$$AB^2 = AO_1^2 + BO_1^2 - 2AO_1 \cdot BO_1 \cdot \cos \alpha$$

$$O_1B^2 = O_1A^2 + AB^2 - 2O_1A \cdot AB \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{-O_1B^2 + O_1A^2 + AB^2}{2O_1A \cdot AB} = \frac{-15^2 + 15^2 + 18^2}{2 \cdot 15 \cdot 18} =$$

$$= \frac{18^2}{2 \cdot 15 \cdot 18} = \frac{18}{2 \cdot 15} = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos \angle O_1BO = -\frac{3}{5}$$





$$E = mc^2$$



ШИФР



Бланк олимпиадной работы

По т. косинусов для $\triangle O, BO$:

$$O, O^2 = O, B^2 + O B^2 - 2 \cdot O, B \cdot O B \cdot \cos \angle O, BO$$

$$O, O^2 = 15^2 + x^2 - 2 \cdot 15 \cdot x \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)$$

$$O, O^2 = 225 + x^2 + 18x$$

$$O, O = \sqrt{x^2 + 18x + 225}$$

Посчитаем площадь этого кольца покрытия:

Для этого из ^{площади} круга радиусом $(18+x)$ вычтем площадь круга радиусом x .

$$\pi (18+x)^2 - \pi (x^2) = \pi ((18+x)^2 - x^2) = \pi \cdot 18 (18+2x)$$

Ответ: $\sqrt{x^2 + 18x + 225}$; $\pi (18+2x) \cdot 18$, где x - радиус платфор
если я правильно понял условие. (Я беру платформу в виде
круга, т.к. для этого случая понятно, что такое центр платформы)