

Бланк олимпиадной работы

Класс 11 Вариант 32 Дата Олимпиады 12.02.23

Площадка написания КНИТУ

ОЦЕНКА

(заполняется проверяющим)

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	10	15	0	20	6					56	Пятьдесят шесть	Емгу

$$\frac{a^{12} - 4096}{64a^6} = ?$$

$$\frac{a^2}{4} - \frac{4}{a^2} = 3 \Rightarrow \frac{a^4 - 16}{4a^2} = 3 \Rightarrow \text{(густовал, что } a \neq 0) \quad a^4 - 16 = 12a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^4 - 12a^2 - 16 = 0$$

Замена: $t = a^2, t > 0$

$$t^2 - 12t - 16 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 36 + 16 = 52 = (2\sqrt{13})^2$$

$$t_1 = 6 - 2\sqrt{13} < 0 - \text{не подходит}$$

$$t_2 = 6 + 2\sqrt{13}$$

Значит, $a = \pm \sqrt{6 + 2\sqrt{13}}$

$$\begin{aligned} \frac{a^{12} - 4096}{64a^6} &= \frac{a^{12} - 2^{12}}{2^6 \cdot a^6} = \frac{a^6}{2^6} - \frac{2^6}{a^6} = \left(\frac{a^3}{2^3} + \frac{2^3}{a^3} \right) \left(\frac{a^3}{2^3} - \frac{2^3}{a^3} \right) = \\ &= \left(\frac{a}{2} + \frac{2}{a} \right) \left(\frac{a^2}{2^2} - \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{a} + \frac{2^2}{a^2} \right) \left(\frac{a}{2} - \frac{2}{a} \right) \left(\frac{a^2}{2^2} + \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{a} + \frac{2^2}{a^2} \right) = \\ &= \left(\frac{a^2}{2^2} - \frac{2^2}{a^2} \right) \left(\left(\frac{a^2}{2} + \frac{4}{a^2} \right)^2 - 1 \right) = \\ &= 3 \cdot \left(\left(\frac{6 + 2\sqrt{13}}{4} + \frac{4}{6 + 2\sqrt{13}} \right)^2 - 1 \right) = 3 \cdot \left(\left(\frac{3 + \sqrt{13}}{2} + \frac{2}{3 + \sqrt{13}} \right)^2 - 1 \right) = \end{aligned}$$

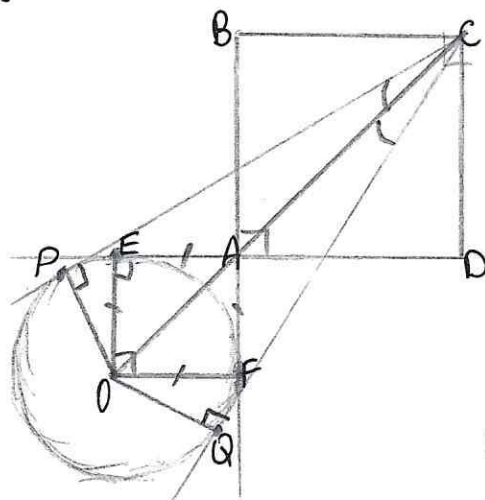
Бланк олимпиадной работы

$$= 3 \cdot \left(\frac{9+6\sqrt{13}+13}{4} + 2 \cdot \frac{9+\sqrt{13}}{2} \cdot \frac{2}{3+\sqrt{13}} + \frac{4}{22+6\sqrt{13}} - 1 \right) = 3 \left(\frac{11+3\sqrt{13}}{2} + \frac{2}{11+3\sqrt{13}} + 2 - 1 \right) =$$

$$= 3 \left(\frac{121+66\sqrt{13}+117+4}{22+6\sqrt{13}} + 1 \right) = 3 + 3 \cdot \frac{242+66\sqrt{13}}{22+6\sqrt{13}} = 3 + 3 \cdot \frac{92(11+3\sqrt{13})}{2(11+3\sqrt{13})} =$$

$$= 3 + 3 \cdot 11 = 36$$

Omber: 36

 ω^2 

$$AE = AF = \sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$$\sin 225^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

$$\angle PCQ = 45^\circ$$

Найти: АВ-?

Решение.

Решение.
Т.к. радиус, проведённый к точке касания, $\perp$ касательной,
то $OE \perp AE, OF \perp AF$ $\Rightarrow OEAF$ -квадрат $\Rightarrow$
 $EA = FA$ (отрезки кас.-х) $\Rightarrow OE = OF = AE = AF = r$

$OP \perp CP \Rightarrow \triangle OPC$ - пр. т.

$$OQ \perp AC \Rightarrow \Delta OQC - \text{прям.}$$

$$OP = OQ = r$$

$CP = CQ$ (отрезки кас.)

00-0000.

$$\left. \begin{array}{l} OP = OQ = r \\ CP = CQ \text{ (отрезки кас.)} \\ OC - \text{общ.} \end{array} \right| \Rightarrow \triangle OPC = \triangle OQC \Rightarrow \angle PCO = \angle QCO = 22,5^\circ$$

$$\sin \angle OCA = \frac{OA}{OC} \Rightarrow OC = \frac{r}{\sin 22,5^\circ}$$

$$OA = \sqrt{OE^2 + EA^2} = r\sqrt{2}$$

$$AC = OC - OA = \frac{r}{\sin 22,5^\circ} - r\sqrt{2}$$

$$AC = OC - OA = \frac{\sin 22.5^\circ}{\sin 45^\circ} - 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} (2 - (\sqrt{2} - 1)) = \frac{2}{\sqrt{2} - 1}$$

$$= (\sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{2}}) \left(\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{2}})}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}} \right) = \frac{2}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}} (\sqrt{2} - (\sqrt{2 - \sqrt{2}})) \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

Поэтому $a = \underline{AB} \Rightarrow AC = a\sqrt{2} \Rightarrow a = \frac{AC}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{2}{2 - \sqrt{2}}}$

Ombem: $\sqrt{\frac{2}{2-\sqrt{2}}}$



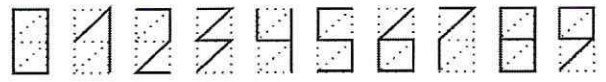
ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР



Бланк олимпиадной работы

У3

$$5x - x^2 + \sqrt{(16-x^2)(-9+10x-x^2)} = 9$$

$$\sqrt{(x^2-16)(x^2-10x+9)} = x^2-5x+9$$

Возведём обе части в квадрат:

$$(x^2-16)(x^2-10x+9) = x^4 - 2x^2(5x-9) + 25x^2 - 90x + 81$$

$$x^4 - 10x^3 + 9x^2 - 16x^2 + 160x - 144 = x^4 - 10x^3 + 43x^2 - 90x + 81$$

$$43x^2 + 7x^2 - 90x - 160x + 81 + 144 = 0$$

$$50x^2 - 250x + 225 = 0 \quad | :25$$

$$2x^2 - 10x + 9 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 25 - 18 = 7$$

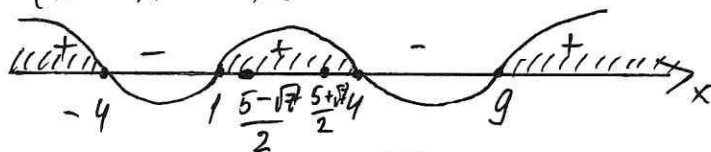
$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{7}}{2}$$

$$x_2 = \frac{5 + \sqrt{7}}{2}$$

Ограничение:

$$(x^2-16)(x^2-10x+9) \geq 0$$

$$(x-4)(x+4)(x-1)(x-9) \geq 0$$



$$\text{Ответ: } x = \frac{5 \pm \sqrt{7}}{2}$$

$$\begin{aligned} -3 &< -\sqrt{7} < -2 \\ 2 &< 5-\sqrt{7} < 3 \\ 1 &< \frac{5-\sqrt{7}}{2} < 1,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 &< \sqrt{7} < 3 \\ 7 &< 5+\sqrt{7} < 8 \\ 3,5 &< \frac{5+\sqrt{7}}{2} < 4 \end{aligned}$$

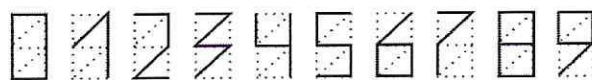


$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР



Бланк олимпиадной работы

W5

$$k \in [5; 7] ; x_1 \leq 2x_2$$

$$(k^2 - 3k - 4)x^2 + (3k - 7)x + 2 = 0$$

$$D = 9k^2 - 42k + 49 - 8k^2 + 24k + 32 = k^2 - 18k + 81 = (k - 9)^2$$

Ур-е квадратное, если $k^2 - 3k - 4 \neq 0$
 $(k+1)(k-4) \neq 0$
 $k \neq -1, k \neq 4$

Ур-е имеет два корня, если $(k-9)^2 > 0$
 $k \neq 9$

Т.к. $k \in [5; 7]$, ур-е можно квадратное и имеет два корня:

$$x_1 = \frac{7 - 3k + k - 9}{2(k^2 - 3k - 4)} = \frac{-2k - 2}{2(k+1)(k-4)} = \frac{-2(k+1)}{2(k+1)(k-4)} = -\frac{1}{k-4}$$

$$x_2 = \frac{7 - 3k - k + 9}{2(k^2 - 3k - 4)} = \frac{-2k + 16}{2(k+1)(k-4)} = \frac{-2(k-4)}{2(k+1)(k-4)} = -\frac{2}{k+1}$$

$$x_1 \leq 2x_2$$

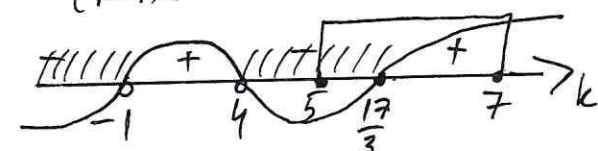
$$-\frac{1}{k-4} \leq -\frac{2}{k+1} \cdot 2$$

$$\frac{4}{k+1} \leq \frac{1}{k-4}$$

$$\frac{4}{k+1} - \frac{1}{k-4} \leq 0$$

$$\frac{4k - 16 - k - 1}{(k+1)(k-4)} \leq 0$$

$$\frac{3k - 17}{(k+1)(k-4)} \leq 0$$



$$k \in [5; \frac{17}{3}]$$

$$\frac{17}{3} - 5 = \frac{17 - 15}{3} = \frac{2}{3}$$

$$2 - \frac{2}{3} = \frac{6 - 2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$P = \frac{\frac{2}{3}}{2} \cdot 100\% = \frac{1}{3} \cdot 100\% \approx 33\% \quad \text{Ответ: } 33\%$$



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР



Бланк олимпиадной работы

56

$$\begin{cases} x+y+z=8 & (1) \\ xy+yz+xz=14 & (2) \end{cases}$$

Введем (1) в квадрат:

$$x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz=64$$

$$x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+xz)=64$$

$$x^2+y^2+z^2+28=64^{(2)}$$

$$x^2+y^2+z^2=36$$

Получилось ур-е сферы с центром в точке (0;0) и радиусом $r=6$
Значит, длина троса — площадь пов-ти сферы:

$$l = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \cdot 216\pi = 4 \cdot 72\pi = 288\pi$$

Ответ: 288π