

Бланк олимпиадной работы

Класс 11 Вариант 32 Дата Олимпиады 12.02.2023

Площадка написания КНИТУ г. Казань

ОЦЕНКА

(заполняется проверяющим)

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	4	3	4	4	6					56	Пятьдесят шесть	<i>Ерш</i>

Задача 2.

Дано: ω , касается $[AB]$ $[AD] = k, L$

$ABCD$ - квадрат

$$AK = \sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{2}} \text{ см}$$

CM, CM_1 - касательные к ω

$$\angle(CM, CM_1) = 45^\circ$$

$$\sin 22,5^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

Найти: AB

Решение:

1) Т.к. ω , вписана во ^{внешний} угол A , то центр ω , т.О лежит на биссектрисе этого угла (по в. вписанной в угол окр)

Аналогично для $\angle MCM_1$ (M и M_1 - точки касания). Т.к. $\angle(CM, CM_1) = 45^\circ$ } $\rightarrow \angle MCO = \angle M_1CO = \frac{45^\circ}{2} = 22,5^\circ$
 CO - дис $\angle MCM_1$

$\angle LAK = 90^\circ$ (как смежный с углом квадрата $ABCD$) } $\rightarrow \angle LAO = \angle KAO = 45^\circ$
 AO - дис $\angle LAK$ (по гор)

2) $OK \perp [AB]$ т.к. K - точка касания, O - центр ω , $[AB]$ - касательная

$OL \perp [AD]$ L - точка касания, O - центр ω , $[AD]$ - касательная

$$\angle LAK = 90^\circ \quad OL = OK = R_\omega$$

попр.

$\rightarrow AKOL$ - квадрат $\rightarrow AK = KO = OL = L$

$$AK = \sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{2}} \rightarrow KO = OL = \sqrt{2} + \sqrt{2}$$

$$R = KO = \sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$$AO = \sqrt{2} \cdot AL = \sqrt{2} R$$

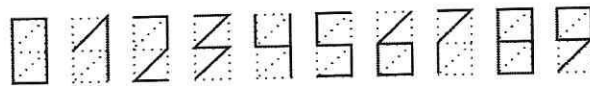


$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР



Бланк олимпиадной работы

Задача 2 (продолжение)

$$R = MO = OM, \quad (M, uM - \text{т. кас.})$$

в $\triangle COM_1$: $OM_1 \perp CM_1$ т.к. O - центр ω , CM_1 - касат. $\rightarrow \angle CMO = 90^\circ \rightarrow \triangle COM_1$ - пр/уг
 M_1 - т. касания

$$\left. \begin{aligned} \angle OCM_1 &= 22,5^\circ \text{ (по грк)} \\ OM_1 &= R = \sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{2}} \text{ см} \\ \sin 22,5^\circ &= \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{OM_1}{CO} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \rightarrow CO = \frac{OM_1 \cdot 2}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2} \cdot 2 + \sqrt{2 - \sqrt{2}} \cdot 2}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}} \text{ см} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}} + 2$$

$$AO = \sqrt{2}R = \sqrt{2}(\sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{2}}) \text{ см} = 2 + \sqrt{4 - 2\sqrt{2}} \text{ см}$$

$$CO = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}} + 2$$

$\triangle CAO$ - пр/уг (т.к. $\angle CAO = 45^\circ$ (по св квадрата))
 $\angle CAO = 45^\circ$ (по грк)

$$AC = \sqrt{CO^2 - AO^2} = \sqrt{12 + 4\sqrt{2} + 8\sqrt{2} + \sqrt{2} - 8 + 2\sqrt{2} - 4\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}}$$

$$CO^2 = 4 \cdot \frac{2}{2 - \sqrt{2}} + 4 + 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}} = 8 + 4\sqrt{2} + 4 + 8\sqrt{2}$$

$$AO^2 = 4 + 4 - 2\sqrt{2} + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{4 - 2\sqrt{2}} = 8 - 2\sqrt{2} + 4\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$$

$$AB = \frac{AC}{\sqrt{2}} \text{ (по св квадрата и ? Пиф)}$$

$$\frac{2}{2 - \sqrt{2}} = \frac{2(2 + \sqrt{2})}{4 - 2} = 2 + \sqrt{2}$$

$$AB = \frac{\sqrt{4 + 6\sqrt{2} + 8\sqrt{2} + \sqrt{2} - 4\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}}}{2} = \sqrt{2 + 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} + \sqrt{2} - 2\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}}$$

$$\text{Ответ: } AB = \sqrt{2 + 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} + \sqrt{2} - 2\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}}$$

Задача 3. $5x - x^2 + \sqrt{(16 - x^2)(-9 + 10x - x^2)} = 9$

$$\sqrt{(x - 4)(x + 4)(x^2 - 10x + 9)} = 9 + x^2 - 5x$$

$$\sqrt{(x - 4)(x + 4)(x - 1)(x - 9)} = 9 + x^2 - 5x$$

$$(x - 4)(x + 4)(x - 1)(x - 9) \geq 0$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{array}{c} + & - & + & - & + \\ \hline -4 & 1 & 4 & 9 & x \end{array}$$

$$x \in (-\infty; -4] \cup [1; 4] \cup [9; +\infty)$$

$$(x - 4)(x + 4)(x - 1)(x - 9) = (9 + x^2 - 5x)^2$$

возведет обе части в

квадрат ик они неотриц.

$$x^4 - 16x^2 - 10x^3 + 160x + 9x^2 - 144 = x^4 + 25x^2 + 81 - 10x^3 + 18x^2 - 90x \quad (\text{квдр. ур-ие отн } x)$$

$$50x^2 + 225 - 250x = 0 \quad | :25$$

$$2x^2 - 10x + 9 = 0$$

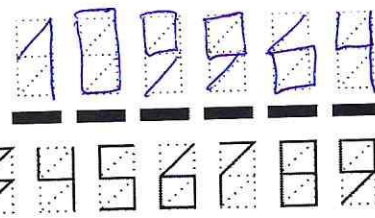
$$D = 100 - 8 \cdot 9 = 28$$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{28}}{4}$$

$$x_1 = \frac{10 + \sqrt{28}}{4} \in [1; 4]$$

$\rightarrow$ корни подходят

$$x_2 = \frac{10 - \sqrt{28}}{4} \in [1; 4]$$



Бланк олимпиадной работы

Задача 1.

$$\frac{a^{12} - 4096}{64a^6} = ?$$

$$\frac{a^2}{4} - \frac{4}{a^2} = 3 \quad (1)$$

1) Из (1) уравнение следует: ~~$\frac{a^2}{4} - \frac{4}{a^2} = 3$~~
 $\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{a}\right)^2 = 3$

2) Преобразуем левое выражение:

$$\frac{a^{12} - 2^{12}}{(2a)^6} = \frac{a^6 \cdot a^6 - 2^6 \cdot 2^6}{2^6 \cdot a^6} = \frac{a^6}{2^6} - \frac{2^6}{a^6} = \left(\frac{a}{2}\right)^6 - \left(\frac{2}{a}\right)^6 \Rightarrow \text{Используем формулу разности кубов}$$

$$\underbrace{\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{a}\right)^2\right)}_{3 \text{ (из п.1)}} \left(\frac{a^4}{2^4} + \frac{a^2}{2^2} \cdot \frac{2^2}{a^2} + \frac{2^4}{a^4}\right) = 3 \cdot \left(\frac{a^4}{2^4} + 1 + \frac{2^4}{a^4}\right) = 3 \left(\frac{a^4}{2^4} - 2 + \frac{2^4}{a^4} + 3\right)$$

(заменим формулу полного квадрата)

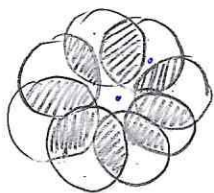
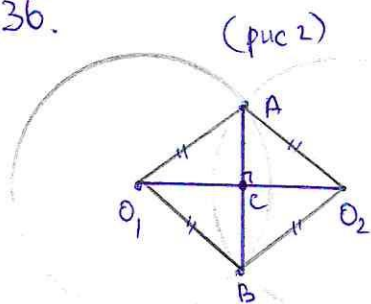
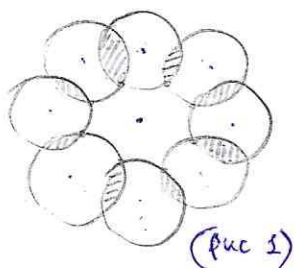
~~$$\left(\frac{a^4}{2^4} - 2 + \frac{2^4}{a^4} + 3\right) = \left(\frac{a^4}{2^4} - 2 + \frac{2^4}{a^4} + 3\right)$$~~

$$3 \left(\left(\frac{a^2}{2^2}\right)^2 - 2 \left(\frac{a^2}{2^2}\right) \left(\frac{2^2}{a^2}\right) + \left(\frac{2^2}{a^2}\right)^2 + 3 \right) = 3 \left(\underbrace{\left(\frac{a^2}{2^2} - \frac{2^2}{a^2}\right)^2}_{3^2} + 3 \right) =$$

$$= 3(3^2 + 3) = 3 \cdot 12 = 36$$

Ответ: 36.

Задача 4



1) Чтобы получить max S от центра платформы до радаров длина области пересечения покрытия радаров должна быть равна 18. Если будет больше радаров будут ближе расположены друг к другу → ближе к центру платформы (рис 1)

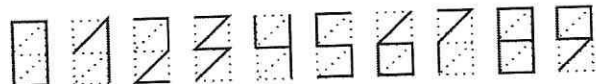
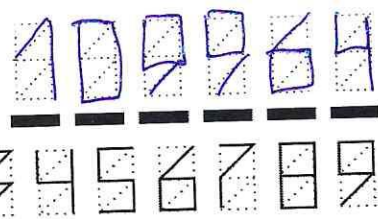
2) Для кольцевого покрытия радаров должны быть расположены по кругу (по окр.

Значит их центры лежат на окружности. ~~Видеосъемка~~
 (продолжение на стр 5)



ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

ШИФР



Бланк олимпиадной работы

Задача 6

$$\begin{cases} x+y+z=8 & (1) \\ xy+yz+xz=14 & (2) \end{cases}$$

(1) возведем в квадрат (левая и правая часть неотриц.)

$$(x+y+z)^2=64$$

$$x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz=64$$

(2) умножим обе части на 2: $2xy+2yz+2xz=28$

Вместе получ. ур-ие:

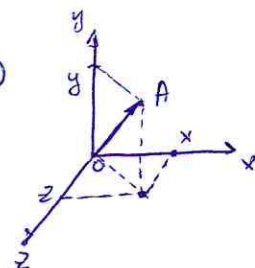
$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz=64 \\ 2xy+2yz+2xz=28 \end{cases} \rightarrow x^2+y^2+z^2=36,$$

Тогда сумма квадратов 3 чисел равен 36

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=6 \quad (\text{т.к. корень } \geq 0)$$

Заметим, что $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ — длина вектора в системе координат с началом в т.О(0;0;0) и концом в т. А(x;y;z)

Тогда длина троса равна длине таких векторов $\vec{OA}$. $|\vec{OA}|=6$.



Ответ: 6.

Задача 5

$$k \in [5; 7]$$

Условие: $x_1 \leq 2x_2$

$$(k^2-3k-4)x^2+(3k-7)x+2=0 \quad D=(3k-7)^2-4 \cdot 2 \cdot (k^2-3k-4)=$$

$$=9k^2-42k+49-8k^2+24k+32=k^2-18k+81=(k-9)^2$$

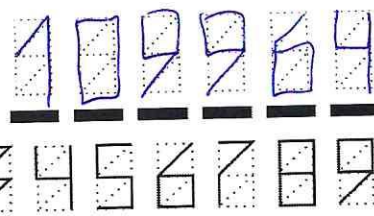
$$x_{1,2} = \frac{-3k+7 \pm (k-9)}{2(k^2-3k-4)} \quad (\text{раскрываем } \sqrt{(k-9)^2}=|k-9|) \quad x_1 = \frac{-3k+7+k-9}{2(k+1)(k-4)} \quad x_2 = \frac{-3k+7-k+9}{2(k+1)(k-4)}$$

учитывается как
знак $\pm$

$$x_1 = \frac{-2k-2}{2(k+1)(k-4)} \quad x_2 = \frac{-4k+16}{2(k+1)(k-4)}$$

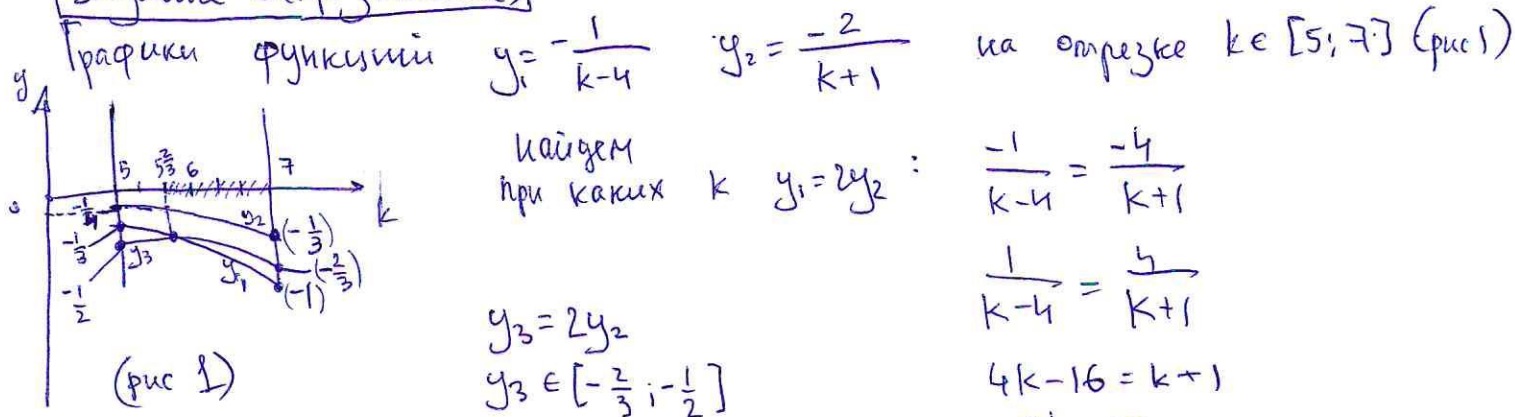
$$k \neq -1 \quad k \neq 4 \rightarrow x_1 = \frac{-1}{k-4} \quad x_2 = \frac{-2}{k+1}$$

В таком случае $x_1 \in [-1; -\frac{1}{3}]$
 $x_2 \in [-\frac{1}{3}; -\frac{1}{4}]$



Бланк олимпиадной работы

Задача 5 (продолжение)



Т.е. условие выполняется на отрезке

$[\frac{17}{3}; 7]$ (это чег. отрезка из 6)

$$\text{вероятность} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Ответ: $\frac{2}{3}$

Задача 4 (продолжение)

По (рис 2): A, B - т. пересечения парабол
радаров

по Q. окр: $AB \perp O_1O_2$

$AB = 18$ (по рис)

$O_2A = O_1A = O_2B = O_1B = 15$ (радиус
покрытия
радара)

$AB \cap O_1O_2 = C$

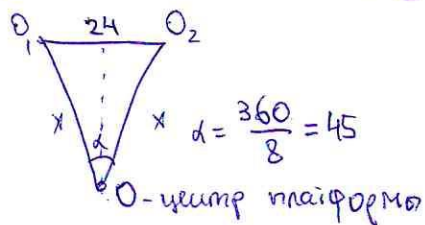
$\Delta AOB = \Delta AO_2B$ - р/б Δ т.к.
 $\angle A = \angle O_2B =$
 $\angle O_2A = \angle O_1B$

$AC = CB$ (ОС - выс. в ΔAOB , CO_2 - выс. в ΔAO_2B)

$$\left. \begin{array}{l} AB = 18 \\ AC = CB \end{array} \right\} AC = CB = 9$$

$$OC = CO_2 = \sqrt{225 - 81} = 12$$

Пусть $O_1, O_2, \dots, O_n$ - радары. Тогда $O_1O_2 \dots O_n$ - прав. Δ -угольник (вследствие и



по т. косинусов

$$24^2 = x^2 + x^2 - 2x^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2x^2 \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2} \right) = x^2(2 - \sqrt{2})$$

$$24 = x\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$$x = \frac{24}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}$$

Ответ: $\max \varphi = \frac{24}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}$