

Бланк олимпиадной работы

Класс 1 курс Вариант 32 Дата Олимпиады 12.02.2023

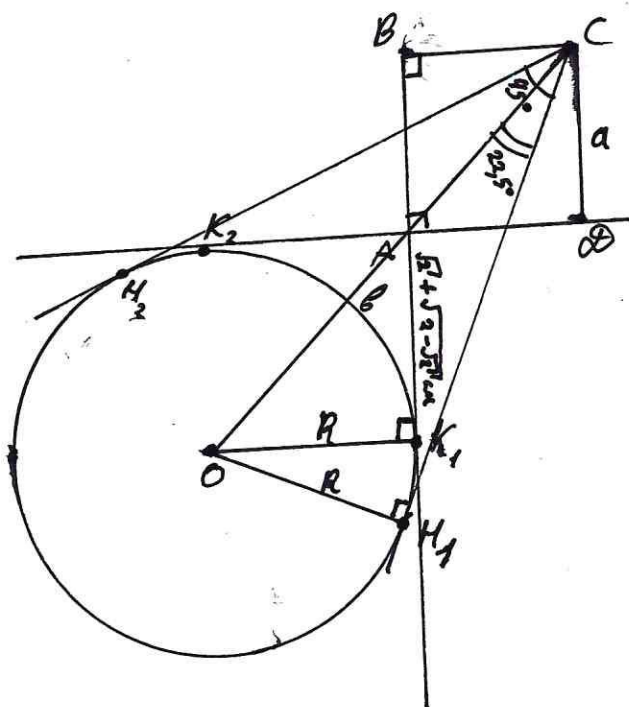
Площадка написания КНИТУ

ОЦЕНКА

(заполняется проверяющим)

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	5	15	0	20	6					51	Пятьдесят один	Ему

Задание 2.



Дано: $ABCD$ - квадрат;

окр-ты $(O; OK_1)$;

$BA \cap (O; OK_1) = K_1$;

$AD \cap (O; OK_1) = K_2$;

$CH_1 \cap (O; OK_1) = H_1$;

$CH_2 \cap (O; OK_1) = H_2$;

$\angle H_2CH_1 = 45^\circ$;

$\sin 22,5^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$;

$AK_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2-\sqrt{2}}$ см.

Найти: AB - ?

Решение:



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Бланк олимпиадной работы

- 1) $OK_1 \perp BK_1$, т.к. $BA \cap (O; OK_1) = K_1$; $\angle AK_1O = 90^\circ$,
аналогично $\angle AK_2O = 90^\circ$.
- 2) $\angle BAD = \angle K_2AK_1$ - накрест лежащие, $\Rightarrow \angle K_1AK_2 = 90^\circ$
- 3) $\angle AK_1O = 90^\circ$
 $\angle K_1AK_2 = 90^\circ \Rightarrow AK_1OK_2$ - кар.-м, прямоугольник.
 $\angle AK_2O = 90^\circ$
- 4) $OK_1 = OK_2 \Rightarrow AK_1OK_2$ - квадрат.
- 5) Центр вписанной в угол окр-ти лежит на бис-се угла; C - равноудалена от AB и AD , т.к.
 $BC = CD$ - по стр-ю квадрата, $\Rightarrow$
 $AC \cap AO = \{C; A; O\}$, $\Rightarrow A \in OC$.
- 6) Обозначим $AD = a$; $OK_1 = R$; $OC = b$;
 $\triangle OH_1C$ - прямоугольный:
 $\sin \angle OCH_1 = \frac{OH_1}{OC}$;
 $\sin\left(\frac{1}{2} \cdot \angle H_2CH_1\right) = \frac{R}{b}$;
 $b = \frac{R}{\sin 22,5^\circ} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{2}}}{\left(\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}\right)} \text{ см} = \frac{2 \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{2}})}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}} =$
 $= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}} + \frac{2\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}} + 2.$



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР

105127

0123456789

Бланк олимпиадной работы

7) по Т. Пифагора:

$$AC = \sqrt{AO^2 + CO^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2};$$

$$OA = \sqrt{OK_1^2 + AK_1^2} = \sqrt{R^2 + R^2} = R\sqrt{2};$$

$$8) OC = OA + AC;$$

$$b = a\sqrt{2} + R\sqrt{2}$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} + 2 = (a + R) \cdot \sqrt{2} \quad | \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{2}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} + \sqrt{2} = a + \sqrt{2} + \sqrt{2-\sqrt{2}} \quad | - \sqrt{2}$$

$$a = \frac{2}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} - \sqrt{2-\sqrt{2}} = \frac{2 - 2 + \sqrt{2}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{2-\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}}}{2-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{4-2\sqrt{2}} \cdot (2+\sqrt{2})}{4-2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2}+1)}{2} = \sqrt{2-\sqrt{2}} \cdot (\sqrt{2}+1) = \sqrt{2-\sqrt{2}} + \sqrt{2\sqrt{2}-2}$$

Ответ: $AB = \sqrt{2-\sqrt{2}} + \sqrt{2\sqrt{2}-2}$

Задача 3.

$$5x - x^2 + \sqrt{(16-x^2)(-9+10x-x^2)} = 9$$

Решение:

$$(16-x^2)(-9+10x-x^2) \geq 0 \quad | \cdot (-1).$$

$$(16-x^2)(9+x^2-10x) \leq 0.$$

$$x^2 - 10x + 9 = 0$$

Бланк олимпиадной работы

$$\begin{cases} x_1 x_2 = 9 \\ x_1 + x_2 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 9 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$$(16 - x^2)(9 + x^2 - 10x) = (4 - x)(4 + x)(x - 9)(x - 1) \leq 0.$$



$$f(0) = (+) \cdot (+) \cdot (-) \cdot (-) = (+)$$

$$x \in (-\infty; -4] \cup [1; 4] \cup [9; +\infty).$$

$$-5x + x^2 + 9 = \sqrt{(16 - x^2)(-9 + 10x - x^2)} \quad | (\quad)^2, \text{ т.к. обе}$$

$$x^2 - 5x + 9 = 0. \quad \text{части} \geq 0.$$

$$D = 25 - 36 = -11 < 0, \Rightarrow x^2 - 5x + 9 > 0.$$

$$(x^2 - 5x + 9)^2 = 16 \cdot (-9) + 9x^2 + 160x - 10x^3 - 16x^2 + x^4$$

$$x^4 + 25x^2 + 81 - 10x^3 - 90x + 18x^2 = -144 + 160x + x^4 - 10x^3 - 7x^2 \quad | -x^4 + 10x^3$$

$$50x^2 - 250x + 225 = 0 \quad | \cdot \frac{1}{25}$$

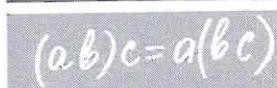
$$2x^2 - 10x + 9 = 0; \quad \frac{b}{2} = -5.$$

$$\frac{D}{4} = 25 - 18 = 7.$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{7}}{2}.$$

$$2 = \sqrt{4} < \sqrt{7} < \sqrt{9} = 3 \quad | (+5) : 2$$

$$3,5 = \frac{7}{2} < \frac{5 + \sqrt{7}}{2} < \frac{8}{2} = 4 \quad \text{— удовлетворяет ОДЗ.}$$



$$E = mc^2$$



ШИФР

105127

□ □ □ □ □ □ □ □ □ □

Бланк олимпиадной работы

$$-3 = -\sqrt{9} < -\sqrt{8} < -\sqrt{4} = -2 \mid (+5) : 2$$

$$1 = \frac{2}{2} < \frac{5-\sqrt{8}}{2} < \frac{3}{2} = 1,5 - \text{удовлетворяет ОДЗ.}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{5 \pm \sqrt{8}}{2}.$$

Задание 5.

$$k \in [5; 7]; \quad x_1 \leq 2x_2; \quad p(k) - ?$$

$$(k^2 - 3k - 4)x^2 + (3k - 7)x + 2 = 0$$

$$\begin{aligned} D &= (3k - 7)^2 - 8(k^2 - 3k - 4) = 9k^2 - 42k + 49 - 8k^2 + 24k + 32 = \\ &= k^2 - 18k + 81 = (k - 9)^2 > 0, \text{ т.к.} \end{aligned}$$

$D > 0$ даёт 2 различных корня, по условию

$x_1 \leq 2x_2$, т.е. если $x_1 = x_2$, то $x_1 = x_2 = 0$ или $x_1 = 0$.

$$x_{1,2} = \frac{-3k + 7 \pm |k - 9|}{2(k^2 - 3k - 4)}; \quad k \in [5; 7]; \quad |k - 9| = +9 - k.$$

$$1) \quad x_1 = \frac{16 - 4k}{2(k^2 - 3k - 4)} = \frac{8 - 2k}{k^2 - 3k - 4};$$

$$x_2 = \frac{-2 - 2k}{2(k^2 - 3k - 4)} = \frac{-k - 1}{k^2 - 3k - 4}$$

$$\frac{8 - 2k}{k^2 - 3k - 4} \leq 2 \cdot \frac{-k - 1}{k^2 - 3k - 4} \quad | \cdot k^2 - 3k - 4$$

$$8 - 2k \leq 2 \cdot (-k - 1)$$

$$4 - k \leq -k - 1$$

$$4 \leq -1 - \emptyset$$

Бланк олимпиадной работы

$$2) X_1 = \frac{-2-2k}{2(k^2-3k-4)} = \frac{-k-1}{k^2-3k-4}$$

$$X_2 = \frac{16-4k}{2(k^2-3k-4)} = \frac{8-2k}{k^2-3k-4}$$

$$\frac{-k-1}{k^2-3k-4} \leq \frac{8-2k}{k^2-3k-4} \cdot 2 \quad | \cdot (k^2-3k-4)$$

$$-k-1 \leq 16-4k$$

$$3k \leq 17$$

$$k \leq \frac{17}{3} = 5 \frac{2}{3}$$

$$X_1 = 0 = \frac{-2-2k}{2(k^2-3k-4)} \Leftrightarrow$$

$$-2-2k=0$$

$$k=1 - \text{не удовл-т } k \in [5; 7]$$

$$X_1 = 0 = \frac{16-4k}{2(k^2-3k-4)} \Leftrightarrow$$

$$0 = 16-4k$$

$$k=4 \notin [5; 7]; \Rightarrow k \leq 5 \frac{2}{3} \text{ и}$$

$$k \in [5; 7].$$

$$p(k) = \frac{L_{\text{под}}}{L_{\text{всего}}}, \text{ где } L - \text{длина.}$$



$$p(k) = \frac{2/3}{2} = \frac{2}{3 \cdot 2} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Ответ: } p(k) = \frac{1}{3}$$

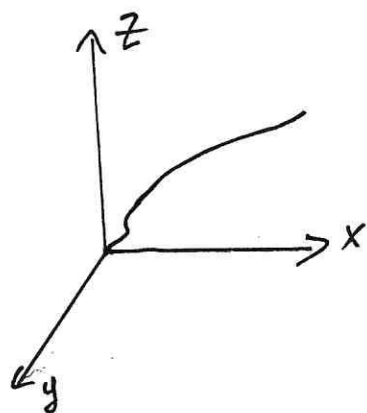
Бланк олимпиадной работы

Задание 6.

Дано: $\begin{cases} x + y + z = 8 \\ xy + yz + xz = 14 \end{cases}$

Найти: L — ?, L — длина троса.

Рассмотрим координатное пространство:



Видим, что $L_{\text{троса}} = L_{\text{кривой}}$, а значит: (L — длина).

$$L = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 8 \quad (*)^2 \\ xy + yz + xz = 14 \cdot 2 \end{cases} ; \quad \begin{cases} (x + y + z)^2 = 64 \\ 2xy + 2yz + 2xz = 28 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 64 \\ 2xy + 2yz + 2xz = 28 \end{cases} ; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 28 = 64 \quad | - 28$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 64 - 28 = 36$$

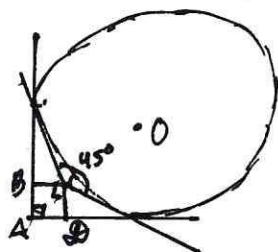
$$L = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{36} = 6$$

Ответ: $L = 6$.

Бланк олимпиадной работы

Задание 2. (Продолжение).

Есть способ 2 построения рисунка (неверный)



по усл-ю: $\angle C = 45^\circ$.

Видно, что $\angle A = 90^\circ$, но

А удалена на большее расстояние,

чем C, $\Rightarrow \angle C > \angle A$, но по условию $\angle C = 45^\circ$,

$\angle A = 90^\circ$:

$45^\circ > 90^\circ$ - что невозможно.

Задание 1.

$$\frac{a^{12} - 4096}{64a^6} \cdot ? \quad \frac{a^2}{4} - \frac{4}{a^2} = 3$$

$$\frac{a^{12} - 4096}{64a^6} = \frac{a^{12}}{2^6 a^6} - \frac{2^{12}}{a^6 \cdot 2^6} = \frac{a^6}{2^6} - \frac{2^6}{a^6} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{a^2}{2^2} - \frac{2^2}{a^2} \right) \left(\frac{a^4}{2^4} + \frac{a^2}{2^2} \cdot \frac{2^2}{a^2} + \frac{2^4}{a^4} \right) = 3 \cdot \left(\left(\frac{a}{2} \right)^4 + \left(\frac{2}{a} \right)^4 + 1 \right) = \\
 &= 3 + 3 \left(\left(\frac{a}{2} \right)^4 + \left(\frac{2}{a} \right)^4 \right) = 3 + 3 \left(\left(\frac{a}{2} \right)^4 + \left(\frac{2}{a} \right)^4 - 2 \cdot \frac{a^2}{2^2} \cdot \frac{2^2}{a^2} + 2 \cdot \frac{a^2}{2^2} \cdot \frac{2^2}{a^2} \right) = \\
 &= 3 + 3 \left(\left(\frac{a^2}{2^2} - \frac{2^2}{a^2} \right)^2 + 2 \right) = 3 + 3 \cdot (3^2 + 2) = 3 + 3 \cdot 11 = 36
 \end{aligned}$$

Ответ: 36