



ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

ШИФР 102353
0123456789

Бланк олимпиадной работы

Класс 10 Вариант 32 Дата Олимпиады 12.02.23

Площадка написания КНИТУ

ОЦЕНКА

(заполняется проверяющим)

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	10	15	0	20	6					56	Пятьдесят шесть	Евс

1. $\frac{a^2}{4} - \frac{4}{a^2} = 3 \mid \cdot 4a^2 \neq 0$, так как a стоит в знаменателе.

$$a^4 - 16 = 3a^2 \cdot 12a^2;$$

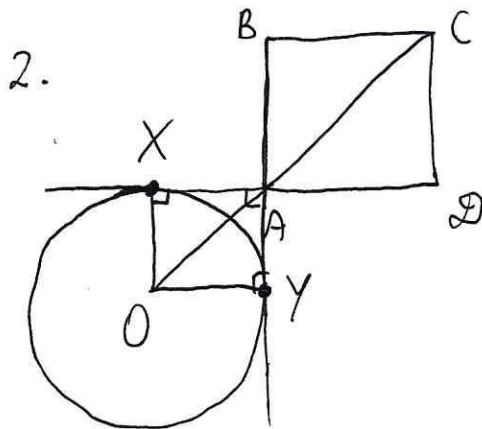
$$\boxed{a^4 = 12a^2 + 16}$$

$$a^8 = (12a^2 + 16)^2 = 144a^4 + 32 \cdot 12a^2 + 256$$

$$a^8 + 16a^4 + 256 = (144a^4 + 32 \cdot 12a^2 + 256) + 16a^4 + 256 = 160a^4 + 32 \cdot (12a^2 + 16) =$$

$$= 160a^4 + 32a^4 = 192a^4.$$

Итак, $\frac{a^{12} - 4096}{64a^6} = \frac{(a^4 - 16)(a^8 + 16a^4 + 256)}{64a^6} = \frac{12a^2 \cdot 192a^4}{64a^6} = 36.$



2. Пусть X - точка касания окружности с продолжением AD , Y - с продолжением AB . По условию заданы $AX = AY = \sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{2}}$ как отрезки касательных. Пусть O - центр окружности. $OX \perp AX$, $OY \perp AY$ как радиусы, проведенные в точку касания. $\angle XAY = 90^\circ = \angle BAD$, так как по условию заданы $ABCD$ - квадрат.

Бланк олимпиадной работы

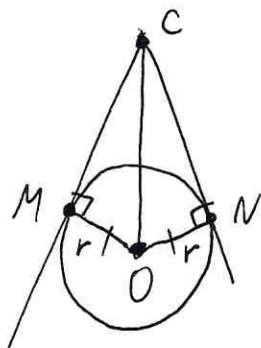
Значит, OXY - прямоугольник, при этом $AX=AY \Rightarrow OXY$ - квадрат $\Rightarrow$
 $\Rightarrow OX=OY=r = \sqrt{2} + \sqrt{2-\sqrt{2}}$, r - радиус окружности.

$$OA = \frac{OX}{\cos \angle XOA} = OX \sqrt{2} = \sqrt{2} \cdot 2 + \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 2 + \sqrt{4-2\sqrt{2}}.$$

AC - биссектриса $\angle BAO$, AO - биссектриса $\angle YAX \Rightarrow$ точки A, C, X коллинеарны.

Пусть d - сторона квадрата $ABCO \Rightarrow AC = d\sqrt{2}$.

$$CO = CA + AO = d\sqrt{2} + 2 + \sqrt{4-2\sqrt{2}}.$$



Пусть CM и CN - касательные из точки C к этой окружности, точки M и N - точки касания. По условию задано $\angle MCN = 45^\circ$.

$OM \perp CM$ как радиус, проведённый в точку касания. CO - биссектриса угла $\angle MCN$, так как

$$p(O; MC) = OM = r = ON = p(O; NC) \Rightarrow \angle MCO = 22,5^\circ.$$

$$\sin \angle MCO = \sin 22,5^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$\frac{MO}{OC} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2-\sqrt{2}}}{d\sqrt{2} + 2 + \sqrt{4-2\sqrt{2}}}.$$

$$\text{Таким образом, } \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2-\sqrt{2}}}{d\sqrt{2} + 2 + \sqrt{4-2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \quad | \cdot 2(d\sqrt{2} + 2 + \sqrt{4-2\sqrt{2}}) \neq 0;$$

$$2\sqrt{2} + 2\sqrt{2-\sqrt{2}} = d\sqrt{4-2\sqrt{2}} + 2\sqrt{2-\sqrt{2}} + \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2-\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2}})$$

$$2\sqrt{2} = d\sqrt{4-2\sqrt{2}} + (2-\sqrt{2}) \cdot \sqrt{2}$$

$$2\sqrt{2} = d\sqrt{4-2\sqrt{2}} + 2\sqrt{2} - 2$$

Бланк олимпиадной работы

$$d \sqrt{4-2\sqrt{2}} = 2 \quad | : \sqrt{4-2\sqrt{2}} \neq 0;$$

$$d = \sqrt{\frac{4}{4-2\sqrt{2}}}$$

$$d = \sqrt{\frac{2}{2-\sqrt{2}}}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2-\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2+\sqrt{2}}$$

$$d = \sqrt{2+\sqrt{2}}$$

Ответ: сторона квадрата равна $\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

$$3. 5x - x^2 + \sqrt{(16-x^2)(-9+10x-x^2)} = 9.$$

$$\sqrt{(16-x^2)(-9+10x-x^2)} = x^2 - 5x + 9$$

$$\begin{cases} (x^2-16)(x^2-10x+9) = (x^2-5x+9)^2 & (1); \\ x^2-5x+9 \geq 0 & (2); \end{cases}$$

$$(1): \cancel{x^4} - 10x^3 - 16x^2 + 9x^2 + 160x - 144 = \cancel{x^4} - 10x^3 + 25x^2 + 18x^2 - 90x + 81$$

$$-7x^2 + 160x - 144 = 43x^2 - 90x + 81$$

$$50x^2 - 250x + 225 = 0$$

$$2x^2 - 10x + 9 = 0.$$

$$D = 10^2 - 4 \cdot 2 \cdot 9 = 100 - 72 = 28.$$

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{28}}{4}$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{7}}{2}$$

$$(2): x^2 - 5x + 9 \geq 0$$

$$(x - \frac{5}{2})^2 + 9 - \frac{25}{4} \geq 0.$$

Бланк олимпиадной работы

$(x - \frac{5}{2})^2 + \frac{11}{4} \geq 0$ при любом x , так как квадрат числа неотрицателен.

Значит, при $x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{7}}{2}$ из равенства $(x^2 - 16)(x^2 - 10x + 9) = 0$
 $= (x^2 - 5x + 9)^2$ следует

равенство $\sqrt{(16 - x^2)(-9 + 10x - x^2)} = x^2 - 5x + 9$.

Следовательно, $x_1 = \frac{5 + \sqrt{7}}{2}$ и $x_2 = \frac{5 - \sqrt{7}}{2}$ — единственные корни уравнения.

5. $(k^2 - 3k - 4)x^2 + (3k - 7)x + 2 = 0$.

Рассмотрим уравнение как квадратное относительно x .

$$D = (3k - 7)^2 - 8(k^2 - 3k - 4) = 9k^2 - 42k + 49 - 8k^2 + 24k + 32 = k^2 - 18k + 81 = (9 - k)^2.$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{(9 - k)^2} = |9 - k| = 9 - k, \text{ так как } k \in [5; 7].$$

$$x_{1,2} = \frac{7 - 3k \pm \sqrt{D}}{2(k^2 - 3k - 4)}.$$

$$k^2 - 3k - 4 = (k + 1)(k - 4), \text{ поэтому при } k \in [5; 7] \quad k^2 - 3k - 4 > 0.$$

Значит, если $x_1 = \frac{7 - 3k - (9 - k)}{2(k^2 - 3k - 4)}$, а $x_2 = \frac{7 - 3k + (9 - k)}{2(k^2 - 3k - 4)}$

Разберём два случая:

1) $x_1 = \frac{7 - 3k - (9 - k)}{2(k^2 - 3k - 4)}, \quad x_2 = \frac{7 - 3k + (9 - k)}{2(k^2 - 3k - 4)}$

$$x_1 \leq 2x_2 \Leftrightarrow \frac{-2 - 2k}{2(k^2 - 3k - 4)} \leq \frac{2(16 - 4k)}{2(k^2 - 3k - 4)} \quad | \cdot 2(k^2 - 3k - 4) > 0, \text{ при } k \in [5; 7]$$

$$-2 - 2k \leq 32 - 8k$$

$$6k \leq 34$$

$$k \leq 5\frac{2}{3}$$

Бланк олимпиадной работы

Вероятность того, что точка, находящаяся на отрезке $[5; 7]$ находится на отрезке $[5; 5\frac{2}{3}]$ равна отношению длин этих отрезков: $\frac{\frac{2}{3}}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$.

$$2) x_1 = \frac{7-3k+(9-k)}{2(k^2-3k-4)}; \quad x_2 = \frac{7-3k-(9-k)}{2(k^2-3k-4)}$$

$$x_1 \leq 2x_2 \Leftrightarrow \frac{16-4k}{2(k^2-3k-4)} \leq \frac{2(-2-2k)}{2(k^2-3k-4)} \quad | \cdot 2(k^2-3k-4) > 0$$

при $k \in [5; 7]$

$$16-4k \leq -4-4k$$

$$20 \leq 0 \leftarrow \text{неверно.}$$

Значит, при таком определении корней вероятность события $x_1 \leq 2x_2$ равна 0.

$$\begin{aligned}
 6. \quad \begin{cases} x+y+z=8 \\ xy+yz+zx=14 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} z=8-x-y \\ xy+z(x+y)=14 \end{cases} \\
 &xy+(8-x-y)(x+y)=14 \\
 &xy+8x+8y-x^2-y^2-2xy=14 \\
 &x^2+y^2+xy-8x-8y+14=0.
 \end{aligned}$$

Рассмотрим это выражение как квадратное уравнение от x : $x^2 + x(y-8) + (y^2-8y+14) = 0$.

Бланк олимпиадной работы

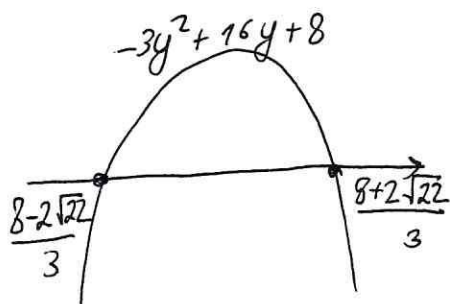
$$D = (y-8)^2 - 4(y^2 - 8y + 14) = y^2 - 16y + 64 - 4y^2 + 32y - 56 = -3y^2 + 16y + 8.$$

У Чтобы уравнение имело решение, D должен быть неотрицательным:

$$-3y^2 + 16y + 8 \geq 0.$$

$$D = 16^2 - 4 \cdot (-3 \cdot 8) = 16(16 + 6) = 16 \cdot 22$$

$$y_{1,2} = \frac{-16 \pm 4\sqrt{22}}{-6} = \frac{16 \mp 4\sqrt{22}}{6} = \frac{8 \mp 2\sqrt{22}}{3}$$



$$y \in \left[\frac{8-2\sqrt{22}}{3}; \frac{8+2\sqrt{22}}{3} \right]$$

По каждому значению $y \in \left(\frac{8-2\sqrt{22}}{3}; \frac{8+2\sqrt{22}}{3} \right)$ из рассматриваемого квадратного уравнения находим два различных значения x , а по значениям x и y можно найти единственное значение $z = 8 - x - y$. То Если $y = \frac{8 \pm 2\sqrt{22}}{3}$, то восстанавливается единственное значение x , а затем затем единственное значение z . Значит, длина кривой равна удвоенной длине отрезка $\left[\frac{8-2\sqrt{22}}{3}; \frac{8+2\sqrt{22}}{3} \right]$, то есть $2 \left(\frac{8+2\sqrt{22}}{3} - \frac{8-2\sqrt{22}}{3} \right) = 2 \cdot \frac{8\sqrt{22}}{3}$.