



ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР

116758

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Бланк олимпиадной работы

Класс 11 Вариант 12 Дата Олимпиады 12.02.2023

Площадка написания УГНТУ

ОЦЕНКА

(заполняется проверяющим)

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	10	15	8	20	—	—	—	—	—	58	пятьдесят восемь	

$$1. \frac{a^{12} + 729^2}{729a^6} = \frac{a^{12}}{729a^6} + \frac{729^2}{729a^6} = \frac{a^6}{729} + \frac{729}{a^6} = \left(\frac{a}{3}\right)^6 + \left(\frac{3}{a}\right)^6 = ?$$

$$\frac{a}{3} - \frac{3}{a} = 4.$$

$$\left(\frac{a}{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{3}{a} = 16$$

$$\left(\frac{a}{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{a}\right)^2 = 18$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{3}\right)^6 + \left(\frac{3}{a}\right)^6 &= \left(\left(\frac{a}{3}\right)^2\right)^3 + \left(\left(\frac{3}{a}\right)^2\right)^3 = \\ &= \left(\left(\frac{a}{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{a}\right)^2\right) \left(\left(\left(\frac{a}{3}\right)^2\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{a}\right)^2 + \left(\left(\frac{3}{a}\right)^2\right)^2\right) = \\ &= 18 \cdot \left(\left(\frac{a}{3}\right)^4 - 1 + \left(\frac{3}{a}\right)^4\right) = 18 \cdot \left(\left(\left(\frac{a}{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{a}\right)^2\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{a}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{a}\right)^2 - 1\right) = \\ &= 18 \cdot (18^2 - 3) = \\ &= 18^3 - 54 = 324 \cdot 18 - 54 = 5832 - 54 = 5778. \end{aligned}$$

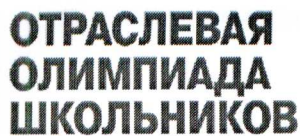
Ответ: 5778

$$3. \begin{cases} x^2 - 23y - 25z = -681 \\ y^2 - 21x - 21z = -419 \\ z^2 - 18x - 21y = -313 \end{cases} +$$

$$\begin{aligned} x^2 - 40x + y^2 - 44y + z^2 - 46z &= -1413 \\ (x-20)^2 + (y-22)^2 + (z-23)^2 - 1413 &= -1413 \\ (x-20)^2 + (y-22)^2 + (z-23)^2 &= 0. \end{aligned}$$

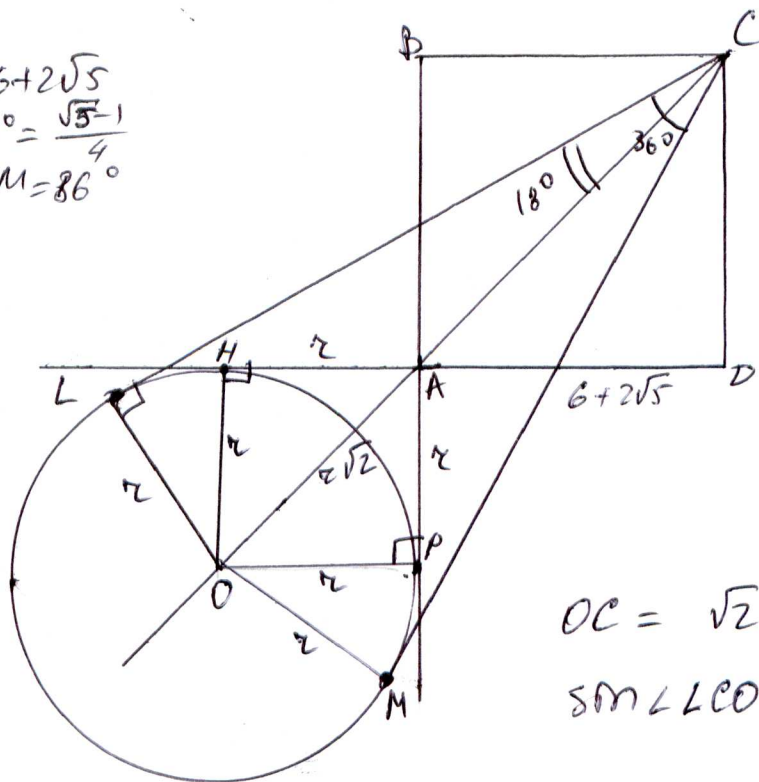
$$\begin{cases} x = 20 \\ y = 22 \\ z = 23 \end{cases}$$

Ответ: (20; 22; 23)



Бланк олимпиадной работы

2. $AD = 6 + 2\sqrt{5}$
 $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$
 $\angle LCM = 86^\circ$



$$\therefore \text{LCM} = 36^\circ$$

$$\angle LCO = 18^\circ$$

Г.К. СО-ДУС-СА LCM

ОНА Р-кв-Т со ст=2

$$OA = \sqrt{HA^2 + HO^2} = 2\sqrt{2}$$

$$AC = \sqrt{(6+2\sqrt{5})^2 \cdot 2} = (6+2\sqrt{5}) \cdot \sqrt{2}$$

$$OC = \sqrt{2}(2+6+2\sqrt{5})$$

$$\sin \angle LCO = \frac{7}{\sqrt{2}(7+6+2\sqrt{5})}$$

$$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{z}{\sqrt{2}(z+6\sqrt{5} \cdot 2)}$$

$$\Rightarrow 4z = (\sqrt{10} - \sqrt{2})(z + 6 + 2\sqrt{5}) = \sqrt{10}z + 6\sqrt{10} + 10\sqrt{2} - \sqrt{2}z + 6\sqrt{2} - 2\sqrt{10}$$

$$z(4 - \sqrt{10} + \sqrt{2}) = 4\sqrt{10} + 4\sqrt{2}$$

$$r = 4 \frac{\sqrt{10} + \sqrt{2}}{4 - \sqrt{10} + \sqrt{2}} = 4 \cdot \frac{\sqrt{5} + 1}{2\sqrt{2} - \sqrt{5} + 1}$$

Answer: $z = 4 \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{2}-\sqrt{5}+1}$

Бланк олимпиадной работы

5. $k \in [6; 11]$

$$(k^2 - 2k - 24)x^2 + (3k - 8)x + 2 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{8 - 3k}{k^2 - 2k - 24} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{2}{k^2 - 2k - 24} \end{cases}$$

$$\Delta = (3k - 8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (k^2 - 2k - 24) = k^2 - 32k + 256 = (k - 16)^2$$

$$x_1 = \frac{8 - 3k + k - 16}{2(k^2 - 2k - 24)} = \frac{-k - 4}{2(k^2 - 2k - 24)}$$

$$x_2 = \frac{8 - 3k - k + 16}{2(k^2 - 2k - 24)} = \frac{12 - 2k}{k^2 - 2k - 24}$$

Пусть $x_1 = 2x_2$ - макс
утверждение $\Rightarrow k = \text{макс}$

$$3x_1 = \frac{8 - 3k}{k^2 - 2k - 24} \Rightarrow x_1 = \frac{8 - 3k}{3(k^2 - 2k - 24)}$$

$$2x_1^2 = \frac{2}{k^2 - 2k - 24}$$

$$2 \cdot \frac{(8 - 3k)^2}{9 \cdot (k^2 - 2k - 24)^2} = \frac{2}{(k^2 - 2k - 24)}$$

$$(8 - 3k)^2 = 9(k^2 - 2k - 24)$$

$$64 - 48k + 9k^2 = 9k^2 - 18k - 216$$

$$280 = 30k$$

$$k = \frac{28}{3}$$

Проверим:

Пусть $k = \frac{28}{3}$ $x_1' = \frac{-14}{56}$

и $k = 10$ $x_2' = \frac{-8}{56}$

Должно быть $x_1 \leq 2x_2$

$$\frac{-14}{56} \leq \frac{-16}{56} - \text{невозможно}$$

$$\frac{-28}{56} \geq \frac{-8}{56} - \text{невозможно}$$

$$\Rightarrow k \leq \frac{28}{3}$$

Пусть $k = 7$: $x_1 \leq 2x_2$

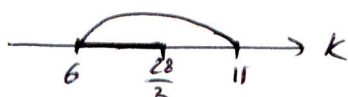
$$x_1' = \frac{-11}{13}$$

$$x_2' = \frac{-2}{13}$$

$$\frac{-11}{13} \leq \frac{-4}{13} - \text{да}$$

$\Rightarrow$ при $k \leq \frac{28}{3}$ и $k \geq 6$
условие $x_1 \leq 2x_2$ выполн.

$$\Rightarrow k \notin [6; \frac{28}{3}] \Rightarrow$$

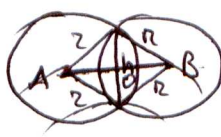
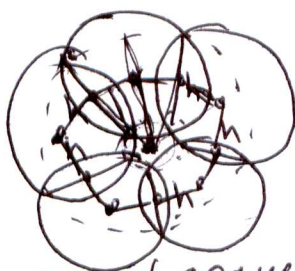


$$\frac{\frac{28}{3} - 6}{5} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

Ответ: $\frac{2}{3}$.

Бланк олимпиадной работы

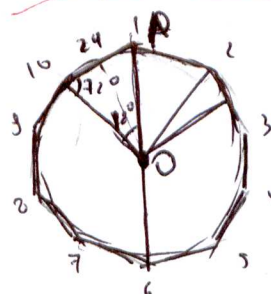
4. 5 радаров $R = 25 \text{ км} \Rightarrow D = 50 \text{ км}$.
 Н- ширина кольца = 14 км.



$$AO = \sqrt{2^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2} = \sqrt{625 - 49} = \sqrt{576} = 24$$

$$AB = 48 \text{ км.}$$

10-угольник - полуциркуль



$$180 : 6 = 30 \cdot 4 = 120$$

$$\frac{180 \cdot 1}{3} = 60$$

$$\frac{n-2}{n} \cdot 180$$

$$\frac{8}{10} \cdot 180 = \frac{4}{5} \cdot 180 = 36 \cdot 4 = 144 = 144^\circ$$

АО - макс угловое от платформы радар

$$PO = \frac{24}{\sin 18^\circ} = \frac{24}{\frac{\sqrt{5}-1}{4}} = \frac{96}{\sqrt{5}-1} = \frac{96(\sqrt{5}+1)}{4} = 24(\sqrt{5}+1) \text{ км.}$$

$H = 14 \text{ км.}$ — ширина
 $PO = 24(\sqrt{5}+1) \text{ км.}$ — радиус кольца покрытия

Радиус всей окр = $PO + 7 = 24(\sqrt{5}+1) + 7 (\text{км})$

$$24\sqrt{5} + 24 + 7 = 24\sqrt{5} + 31 = 14 \text{ км.}$$

$$\Rightarrow S_{\text{покрытия}} = \pi H^2 = 196\pi \text{ км}^2$$

$$PO - 7 = 24\sqrt{5} + 17 (\text{км})$$

Ответ: макс угловое = $24(\sqrt{5}+1) \text{ км.}$
 $S_{\text{покр}} = 196\pi \text{ км}^2$