



Математика

Площадка написания

Санкт-Петербургский Государственный электротехнический Университет "ЛЭТИ"

Шифр 94561 Класс 9

Вариант 32 Дата 19.02.2022

Заполняется проверяющим строго по образцу

Образец заполнения: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5	1	0	1	5		2	0	1	0

Оценка цифрами

Оценка прописью

Подпись

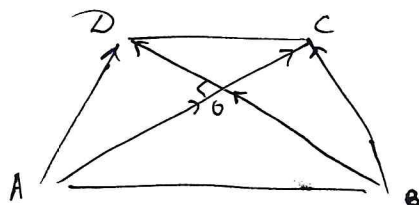
6	0	шестьдесят				Итовок			
---	---	------------	--	--	--	--------	--	--	--

Δ_1
 $x^9 - 22x^3 - \sqrt{21} = 0$
 Пусть $x^3 = t$, тогда $x^9 = t^3$
 Получим:
 $t^3 - 22t - \sqrt{21} = 0$
 $t^3 - 21t - t - \sqrt{21} = 0$
 $t(t^2 - 21) - (t + \sqrt{21}) = 0$
 $t(t - \sqrt{21})(t + \sqrt{21}) - (t + \sqrt{21}) = 0$
 $(t + \sqrt{21})(t^2 - t\sqrt{21} - 1) = 0$
 $t_1 = -\sqrt{21}$ $t^2 - t\sqrt{21} - 1 = 0$
 $D = 21 + 4 = 25$
 $t_2 = \frac{\sqrt{21} + 5}{2}$ $t_3 = \frac{\sqrt{21} - 5}{2}$
 Так как $x^3 = t$
 Тогда $x_1 = \sqrt[3]{-\sqrt{21}}$ $x_2 = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{21} + 5}{2}}$ $x_3 = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{21} - 5}{2}}$
 Ответ: $\sqrt[3]{-\sqrt{21}}$; $\sqrt[3]{\frac{\sqrt{21} + 5}{2}}$; $\sqrt[3]{\frac{\sqrt{21} - 5}{2}}$

Δ_3

Решение.

Дано:
 ABCD - трапеция
 AB = 41
 CD = 24
 AC $\perp$ BD
 Найти:
 $\vec{AD} \cdot \vec{BC}$



Пусть $AO \perp AC \cap DB = O$.
 Тогда $\vec{AO} + \vec{OD} = \vec{AD}$ (по правилу -
 $\vec{BO} + \vec{OC} = \vec{BC}$ (из треугол.)
 перемножим равенства:
 $\vec{AO} \cdot \vec{BO} + \vec{AO} \cdot \vec{OC} + \vec{OD} \cdot \vec{BO} + \vec{OD} \cdot \vec{OC} =$
 $= \vec{AD} \cdot \vec{BC}$
 $\vec{AO} \cdot \vec{OC} = |\vec{AO}| \cdot |\vec{OC}| = 12 \vec{AO} \cdot \vec{OC}$
 $\vec{OD} \cdot \vec{BO} = |\vec{OD}| \cdot |\vec{BO}| = 12 \vec{OD} \cdot \vec{BO}$
 Т.к. $AO \perp BO \Rightarrow \vec{AO} \cdot \vec{BO} = |\vec{AO}| \cdot |\vec{BO}| \cdot \cos 90^\circ = 0$
 AO и OC - лежат на одной прямой $\Rightarrow \vec{AO} \cdot \vec{OC} = |\vec{AO}| \cdot |\vec{OC}|$
 OD и BO - лежат на одной прямой $\Rightarrow \vec{OD} \cdot \vec{BO} = |\vec{OD}| \cdot |\vec{BO}|$
 $\vec{OD} \perp \vec{OC} \Rightarrow$ (из выше доказ.), тогда $\vec{OD} \cdot \vec{OC} = 0$.
 Тогда $\vec{AD} \cdot \vec{BC} = \vec{OD} \cdot \vec{BO} + \vec{AO} \cdot \vec{OC} (1)$



$\angle AOB$ и $\angle DOC$:

$\angle OAB = \angle OCD$ (как ост. лем.) $\angle AOB = \angle DOC$ (верт.)

Тогда $\frac{BO}{OD} = \frac{AO}{OC} = \frac{AB}{DC}$
 $AB = 41$; $DC = 24$ (по укл.) $\Rightarrow \frac{BO}{OD} = \frac{41}{24}$ $OD = \frac{BO \cdot 24}{41}$

$\frac{AO}{OC} = \frac{41}{24}$ $\frac{OC}{41} \cdot 24 = AO$ $AO = \frac{24}{41} \cdot OC$
 Подставим в формулу (1)

$\vec{AD} \cdot \vec{BC} = \frac{BO^2 \cdot 24}{41} + \frac{OC^2 \cdot 41}{24}$

$\vec{AD} \cdot \vec{BC} = \frac{BO^2 \cdot 24}{41} + \frac{AO^2 \cdot 24}{41} = \frac{24(BO^2 + AO^2)}{41}$

$BO^2 + AO^2$ (по т. Пиф.) Т.к. $\triangle AOB$ - прямоугол., то

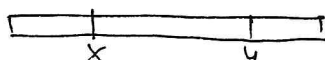
$AO^2 + OB^2 = AB^2$

$\Rightarrow \vec{AD} \cdot \vec{BC} = \frac{24 \cdot 41^2}{41} = 24 \cdot 41 = 984$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 41 \\ \hline 240 \\ 984 \\ \hline 984 \end{array}$$

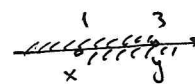
Ответ: 984.

№5.

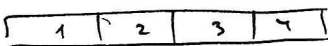


Назовем точки равные точки, тогда x и y и будем считать длину слева направо, тогда 1 кусок $\geq x$; второй $\geq y - x$, третий $\geq 4 - y$

Тогда по усл. $\begin{cases} x \geq 1 \\ y - x \geq 1 \\ 4 - y \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 1 + x \\ y \leq 3 \end{cases}$



Т.е. мы имеем, что есть труба, она поделена на четыре равные части по 1 метр:



Тогда x принадлежит 2 куску, а y - 3 куску. Вероятность того, что x окажется в 2 $= \frac{1}{4} = \frac{1}{4} = 0,25$

Вероятность того, что y окажется в 3 $= \frac{1}{4} = \frac{1}{4} = 0,25$.

Так для каждого x есть свой набор y (например если

x лежит на стыке 1 и 2, то y - в любой точке 3, если

x на стыке 2 и 3, то y только в стыке 3 и 4) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Общая вероятность будет равна произведению



вероятностей $z = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16} = 0,0625$.

Ответ: 0,0625

Найдём, сколько аксий принадлежит компании Тринефть.

Составим таблицу:

	Разнефть	Дванефть	Тринефть
кол-во аксий	x	y	z
стоимость аксий	a	b	c

Так, как по усл. можно составить систему

$$\begin{cases} x+y+z=2 & (1) \\ \frac{xa}{yb}=3 & (2) \\ xa+yb=c-z & (3) \\ (a-b) \in [10; 18] & (4) \\ c \in [18; 42] & (5) \end{cases}$$

Тогда процент от компании Тринефть:

$$\frac{z}{x+y+z} \cdot 100\% = \frac{z}{22} \cdot 100\% = 50\%$$

→ сумма процентов разнефти и дванефти = 50

(2) $xa = 3yb$

(3) $3yb + yb = 4yb = c - z$

(1) $x+y+z = 2$
 $xa + ya = 2a$
 $xa + yb = c - z$

$$\begin{aligned} y(a-b) &= z(a-c) \\ (a-b) &= z \frac{(a-c)}{y} \end{aligned} \quad | y \neq 0$$

Так как $a \neq b$ ($(a-b) \in [10; 18]$) и $a > b$, то $a-b > 0$;
 $z \geq 0$; $y \geq 0$ (и, тогда $a-c > 0$ $a > c \Rightarrow a > 18$)

Тогда $\min a \geq 18$

(2) $\frac{xa}{3} = yb$

(3) $\frac{xa + 3xa}{3} = c - z$

$c - z = \frac{4xa}{3}$ $z = \frac{4xa}{3c}$

Процент аксий разнефти = $\frac{x}{22} \cdot 100\%$ Тогда $\max \frac{3c}{8a}$ будет тогда,

→ $\frac{x}{22} \cdot 100\% = \frac{x \cdot 3c}{8xa} = \frac{3c}{8a}$

когда $3c - \max$, $8a - \min$ ($\max z = 42$, $\min a \geq 18$)

→ $\frac{3 \cdot 42}{8 \cdot 18}$ но т.к. $a > c$, то нам нужно получить $\max \frac{c}{a}$

$\lim_{c \rightarrow a} \frac{c}{a} = 1 \Rightarrow$ максимальный процент = $\frac{1}{8}$
 минимальный процент = $\frac{1}{8}$

~~Анализ~~

(2) $xazub$

(3) $zyb = cz$
 $z = \frac{zyb}{c}$

Т.к. процент
max разности

$\Rightarrow \frac{c}{b} \geq 18$

Т.к. процент Дванерти = $\frac{y}{2z}$, то он равен $\frac{c}{8b}$.

$a \geq 18 \Rightarrow b \geq 8 \Rightarrow \min b = 8 \Rightarrow \max c$ при таком $b = 18$, т.к.
 $c \rightarrow a \Rightarrow \frac{18}{64} = \max$ процент Дванерти?

Ответ: $\min = \frac{1}{8}$
 $\max = \frac{18}{64}$

✓ 1 скобка: $\left(\frac{3}{4} - \frac{3}{16} + \frac{27}{64} - \frac{81}{256} + \dots \right) = \left(\frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 - \left(\frac{3}{4}\right)^4 + \dots \right)$
Можно заметить, что в скобках написана бесконечно убывающая геом. прогрессия, где $q = -\frac{3}{4}$; $b_1 = \frac{3}{4}$;
 $\Rightarrow S_1 = \frac{b_1}{1-q}$ (беск. убыв. геом. прогрессия, $q < 1$)

$$S_1 = \frac{\frac{3}{4}}{1 - (-\frac{3}{4})} = \frac{\frac{3}{4}}{1 + \frac{3}{4}} = \frac{3}{7}$$

✓ 2 скобка: $\left(\frac{2}{7} - \frac{4}{49} + \frac{8}{343} - \frac{16}{2401} + \dots \right) = \left(\frac{2}{7} - \left(\frac{2}{7}\right)^2 + \left(\frac{2}{7}\right)^3 - \left(\frac{2}{7}\right)^4 + \dots \right)$

Аналогично здесь тоже бесконечно убывающая геом. прогрессия, где $q = -\frac{2}{7}$; $b_1 = \frac{2}{7}$. Первая член = $\frac{2}{7}$, $b_1 = \frac{2}{7}$.

$$S_2 = \frac{b_1}{1-q} = \frac{\frac{2}{7}}{1 - (-\frac{2}{7})} = \frac{\frac{2}{7}}{1 + \frac{2}{7}} = \frac{2}{9}$$

$$\text{Тогда } S_1 \cdot S_2 = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{9} = \frac{2}{21}$$

Ответ: $\frac{2}{21}$ +