

ШИФР 112222

11222222

Бланк олимпиадной работы

Класс 11 Вариант 22 Дата Олимпиады 12.02.23

Площадка написания ЛЭТИ

ОЦЕНКА

(заполняется проверяющим)

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	4	10	15	0	20	0					49	сорок девять	В.И.Ф.



ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

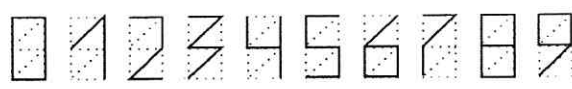
$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР

119297



Бланк олимпиадной работы

Задача 1.

$$\frac{a^{12} + 4096}{64a^6} = \frac{a^{12} + 2^{12}}{2^6 a^6} = \frac{a^6}{64} + \frac{64}{a^6}$$

$$\frac{a}{2} - \frac{2}{a} = 3 \quad \text{возв. в квадрат: } \frac{a^2}{4} + \frac{4}{a^2} - 2 = 9 \quad ; \quad \frac{a^2}{4} + \frac{4}{a^2} = 11$$

$$\text{возв. в куб: } \left(\frac{a^2}{4} + \frac{4}{a^2}\right)^3 = 11^3 \quad \text{и в квадрат: } \left(\frac{a^2}{4} + \frac{4}{a^2}\right)^2 = 11^2$$

$$\frac{a^6}{64} + 3 \cdot \frac{16}{a^4} + 3 \cdot \frac{a^4}{16} + \frac{64}{a^6} = 11^3 \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{a^4}{16} + \frac{16}{a^4} + 2 = 121 \\ \frac{a^4}{16} + \frac{16}{a^4} = 119 \end{array} \right.$$

$$\frac{a^6}{64} + \frac{64}{a^6} = 11^3 - 3 \left(\frac{16}{a^4} + \frac{a^4}{16} \right) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{a^4}{16} + \frac{16}{a^4} = 119 \end{array} \right.$$

Подставим в 3):

$$\frac{a^6}{64} + \frac{64}{a^6} = 11^3 - 3 \cdot 119 = 1331 - 357 = 974$$

$$6) \quad \frac{a^6}{64} + \frac{64}{a^6} = 974$$

Ответ: 974

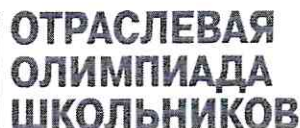
Задача 3

$$\begin{cases} x^2 - 23y + 66z + 612 = 0 \\ y^2 + 62x - 20z + 296 = 0 \\ z^2 - 22x + 67y + 505 = 0 \end{cases}$$

Сложим эти три уравнения:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 40x + 44y + 46z + 1413 = 0$$

$$(x^2 + 40x + 400) + (y^2 + 44y + 484) + (z^2 + 46z + 529) - 400 - 484 - 529 + 1413 = 0$$



119297


$$\Rightarrow \angle KAO = \angle OAM = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$



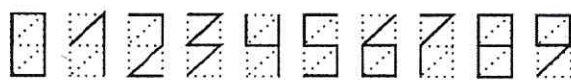
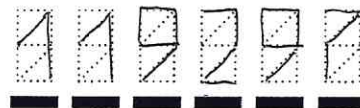
ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР



Бланк олимпиадной работы

Задача 2. Круговое движение.

5) Рассмотрим $\triangle OAM$:

$$\angle OMA = 90^\circ; \angle OAM = 45^\circ \Rightarrow \angle AOM = 45^\circ \text{ и } \triangle OAM - \text{р/д} \Rightarrow OM = AM = R$$

из п. 4

По т. Пифагора: $OA^2 = OM^2 + AM^2$

$$OA^2 = R^2 + R^2$$

$$OA^2 = 2R^2$$

$$OA = R\sqrt{2}$$

6) из п. 2: $R = (AC + AO) \cdot \sin 36^\circ$

из п. 3: $AC = \sqrt{2} (2 - \sqrt{5 - \sqrt{5}})$

из п. 5: $AO = R\sqrt{2}$

По укл.: $\sin 36^\circ = \frac{\sqrt{5 - \sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow R = (\sqrt{2} (2 - \sqrt{5 - \sqrt{5}}) + R\sqrt{2}) \cdot \frac{\sqrt{5 - \sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$$

$$R = (2\sqrt{2} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{5 - \sqrt{5}} + R\sqrt{2}) \cdot \frac{\sqrt{5 - \sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$$

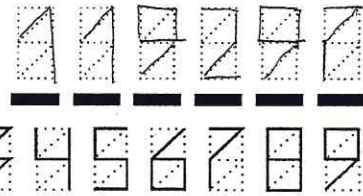
$$R = \sqrt{5 - \sqrt{5}} - \frac{5 - \sqrt{5}}{2} + R \cdot \frac{\sqrt{5 - \sqrt{5}}}{2}$$

$$R - R \cdot \frac{\sqrt{5 - \sqrt{5}}}{2} = \sqrt{5 - \sqrt{5}} - \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$$

$$R \left(1 - \frac{\sqrt{5 - \sqrt{5}}}{2} \right) = \sqrt{5 - \sqrt{5}} \left(1 - \frac{\sqrt{5 - \sqrt{5}}}{2} \right)$$

$$R = \sqrt{5 - \sqrt{5}}$$

Ответ: $R = \sqrt{5 - \sqrt{5}}$



Бланк олимпиадной работы

Задача 5

$$(k^2 - 2k - 3)x^2 + (3k - 5)x + 2 = 0, \quad k \in [3; 8]$$

$$\text{при } k^2 - 2k - 3 \neq 0:$$

$$x_{1,2} = \frac{5 - 3k \pm \sqrt{(3k - 5)^2 - 8(k^2 - 2k - 3)}}{2(k^2 - 2k - 3)} = \frac{5 - 3k \pm \sqrt{9k^2 - 30k + 25 - 8k^2 + 16k + 24}}{2(k - 3)(k + 1)} = \frac{5 - 3k \pm \sqrt{k^2 - 14k + 49}}{2(k - 3)(k + 1)}$$

$$= \frac{5 - 3k \pm \sqrt{(k - 7)^2}}{2(k - 3)(k + 1)} = \frac{5 - 3k \pm (k - 7)}{2(k - 3)(k + 1)}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{5 - 3k + k - 7}{2(k - 3)(k + 1)} = \frac{-2 - 2k}{2(k - 3)(k + 1)} = -\frac{k + 1}{(k + 1)(k - 3)} = \frac{1}{3 - k}$$

$$x_2 = \frac{5 - 3k - k + 7}{2(k - 3)(k + 1)} = \frac{12 - 4k}{2(k - 3)(k + 1)} = \frac{6 - 2k}{(k - 3)(k + 1)} = \frac{-2(k - 3)}{(k - 3)(k + 1)} = \frac{-2}{k + 1}$$

при $k^2 - 2k - 3 = 0$:

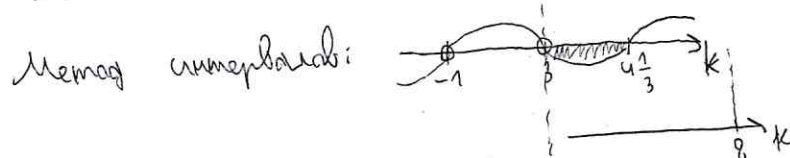
$$(k - 3)(k + 1) = 0 \Rightarrow k = 3, -1, \text{ т.к. } k \in [3; 8], \text{ то в этом случае } k = 3, \text{ тогда:}$$

$$4x + 2 = 0$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

$$x_1 \leq 2x_2:$$

$$\frac{1}{3 - k} \leq \frac{-4}{k + 1}; \quad \frac{1}{3 - k} + \frac{4}{k + 1} \leq 0; \quad \frac{k + 12 - 4k}{(3 - k)(k + 1)} \leq 0; \quad \frac{13 - 3k}{(3 - k)(k + 1)} \leq 0 \quad k_1 = \frac{13}{3} = 4\frac{1}{3}; \quad k_2 = 3; \quad k_3 = -1$$



Подходят $k \in (3; 4\frac{1}{3}]$

2) Если $x_1 = \frac{-2}{k + 1}$, а $x_2 = \frac{1}{3 - k}$, то:

$$\frac{-2}{k + 1} \leq \frac{2}{3 - k}; \quad \frac{-1}{k + 1} \leq \frac{1}{3 - k}; \quad \frac{1}{3 - k} + \frac{1}{k + 1} \geq 0; \quad \frac{k + 1 + 3 - k}{(3 - k)(k + 1)} \geq 0; \quad \frac{4}{(3 - k)(k + 1)} \geq 0 \quad k_1 = 3; \quad k_2 = -1$$



ни одного k не подходит.

Лист 5 из 6

Тогда вероятность: $\frac{4\frac{1}{3} - 3}{8 - 3} = \frac{4}{15}$

Ответ: $\frac{4}{15}$



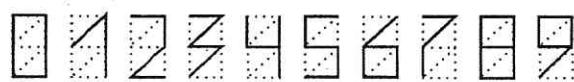
ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

ШИФР



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$

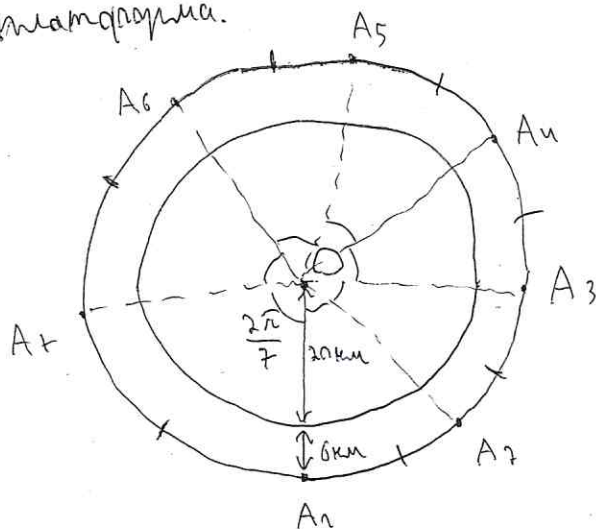


Бланк олимпиадной работы

Задание и.

Нарисуйте круг с $R = 20$ км, который должен покрывать радары.

(•)О - мертвая территория.



Максимальное расстояние, на котором можно расположить радары от центра — это дальность их покрытия, т.е. на $r = 26$ км (если дальше, чем 26 км, то радар просто не будет покрывать зону вокруг мертвой территории). Показем расстановку радаров. Намертили вокруг (•)О окружность с $R = 26$ км. Круг — это 2π . У нас 7 радаров, т.е. расположили их на окружности с радиусом R на расстоянии $\frac{2\pi}{7}$ друг от друга.

$$S = \pi R^2 = \pi \cdot (20 \text{ км})^2 = 400\pi \text{ км}^2$$

Ответ: $400\pi \text{ км}^2$