ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

ШИФР 119318

0123456789

Бланк олимпиадной работы

Класс 10 Вариант 21 Дата Олимпиады 12.02.23

Площадка написания ЛЭТИ

ОЦЕНКА

(заполняется проверяющим)

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	0	10	15	10	12	0					47	Сорок семь	[подпись]

Задача 1:

$$a \neq 0$$

$$\frac{a}{3} - \frac{3}{a} = 2 \quad | \cdot a$$

$$\frac{a^2}{3} - 3 - 2a = 0 \quad | \cdot 3$$

$$a^2 - 9 - 6a = 0$$

$$D = 36 + 4 \cdot 9 = 2 \cdot 36 \quad \sqrt{D} = 6\sqrt{2}$$

$$a_{12} = \frac{6 \pm 6\sqrt{2}}{2} = 3 \pm 3\sqrt{2} = \boxed{3(1 \pm \sqrt{2})}$$

Заменим:

$$729 = 27^2 = (3^3)^2 = 3^6$$

$$\frac{a^{12} + 729^2}{729 a^6} = \frac{3^{12} \cdot (1 \pm \sqrt{2})^{12} + 3^{12}}{3^6 \cdot 3^6 \cdot (1 \pm \sqrt{2})^6} = \frac{\cancel{3^{12}}((1 \pm \sqrt{2})^{12} + 1)}{\cancel{3^{12}} \cdot (1 \pm \sqrt{2})^6} =$$

$$= \frac{(1 \pm \sqrt{2})^{12} + 1}{(1 \pm \sqrt{2})^6} = (1 \pm \sqrt{2})^6 + \frac{1}{(1 \pm \sqrt{2})^6}$$

Ответ: $(1 \pm \sqrt{2})^6 + \frac{1}{(1 \pm \sqrt{2})^6}$

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(a\cdot b)c=a(b\cdot c)$ $E=mc^2$

ШИФР 11931B

0123456789

Бланк олимпиадной работы

$$\begin{cases} x^2-22y-69z+703=0 \\ y^2+23x+23z-1473=0 \\ z^2-63x+66y+2183=0 \end{cases}$$

Сложим все ур-я:

$$x^2+y^2+z^2-22y+66y-69z+23z+23x-63x+703-1473+2183=$$

$$x^2-\underset{2\cdot 20}{40x}+y^2+\underset{2\cdot 22}{44y}+z^2-\underset{2\cdot 23}{46z}+1413=0$$

Заметим, что

$$1413=400+484+529=20^2+22^2+23^2$$

Значит по формулам СУ до квадрата дополним:

$$(x^2-40x+400)+(y^2+44y+484)+(z^2-46z+529)=0$$

$$(x-20)^2+(y+22)^2+(z-23)^2=0$$

т.к. квадрат числа ≥ 0, то в сумме три квадрата могут дать 0, если каждый из них равен нулю, воспользуемся этим:

$$\begin{cases} x-20=0 \\ y+22=0 \\ z-23=0 \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} x=20 \\ y=-22 \\ z=23 \end{array}\right.$$

Ответ: ~~20; 222; 23~~

$(20; -22; 23)$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ГАЗПРОМ

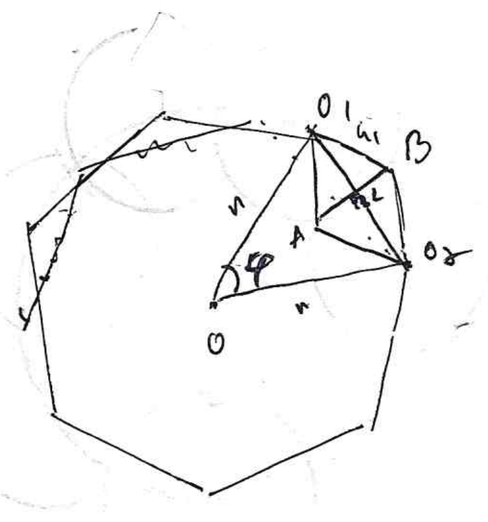
ШИФР 119318

Бланк олимпиадной работы

Задача 4

Чтобы расстояния между центрами было максимальным (а значит и минимальным их перекрытие друг другом) надо чтобы окружностей центры лежали на вершинах ~~...~~ правильного семиугольника.

Построим рисунок:



Решение:

I Рассмотрим две окружности: AB = 18 и дуги AL = LB = 9

AO_1BO_2 — ромб со стороной 41

$O_1L = O_2L$ т.к. AB диагональ

по теор Пифагора $LO_2^2 = AO_2^2 - AL^2 = 41^2 - 9^2 = 1600$, $LO_2 = 40$

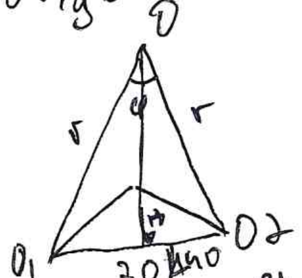
$O_1O_2 = 80$

$\varphi = \frac{360}{7} \approx 51{,}42^\circ$

(по св-вам правильных многоугольников)

$72 \times 40 = 2880$

II Отдельно рассмотрим O



Найдем высоту OL:

для этого найдем r: по теореме:

$80^2 = 2r^2 - 2r^2\cdot\cos\varphi$

$r = \frac{40\sqrt{2}}{1-\cos\varphi}$

$OL^2 = r^2 - 40^2 = \frac{40^2\cdot 2}{1-\cos\varphi} - 40^2 = 40^2\cdot\frac{1+\cos\varphi}{1-\cos\varphi}$

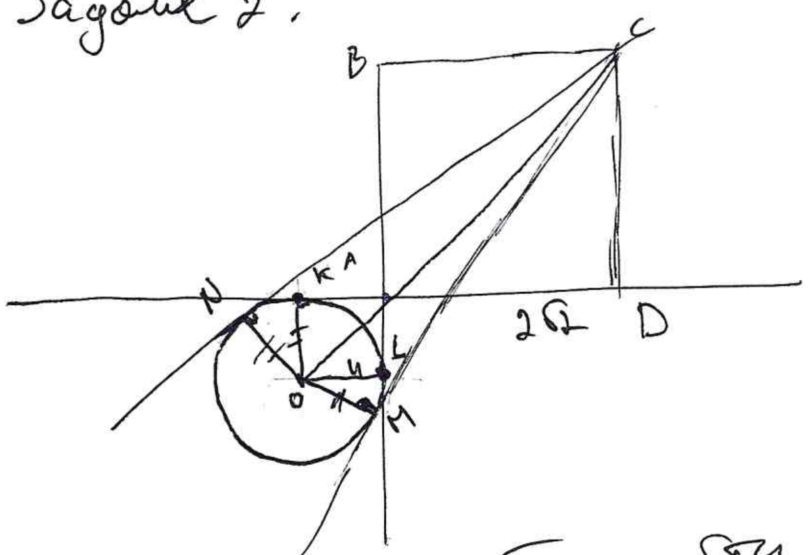
$OL = 40\sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{1-\cos\varphi}}$

площ S кольца:

$S = \pi(OL+18)^2 - \pi(OL-18)^2 = 72\,OL = 72\cdot 40\cdot\sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{1-\cos\varphi}}$

Ответ: $2880\sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{1-\cos\varphi}}$

Задание 2:



Решение:

I Построим радиусы к точкам касания с касательными NO и MO, а также радиусы к точкам касания с продолжением сторон квадрата

II OKAL – квадрат, т.к. $OK = OL = r$; и все углы прямые по св-ву касательных.

* r – радус, который надо найти.

III Построим CO – она биссектриса $\angle NCM$ по определению ($NO = OM = r$)

IV Рассмотрим $\angle OCM$; $\angle M$ – прямой, докажем, что OC лежит на диагоналях квадратов ABCD и OKAL, т.к. OC – биссектриса $\angle BAD$ и также биссектриса $\angle KAC$ по определению ($KO = KL$) $\angle BAD = \angle KAC = 90^\circ$

Значит $OC = OA + AC$

V $AC = CD\sqrt{2} = 2\sqrt{6}$ $\quad OC = r\sqrt{2} + 2\sqrt{6} = \sqrt{2}(r + 2\sqrt{3})$

$OA = r\sqrt{2}$ $\quad \angle OCM = \frac{1}{2}\angle NCM = 15^\circ$ так OC – биссектриса

VI по опр. синуса:

$$OM = OC \cdot \sin\angle OCM$$

$$r = \sqrt{2}(r + 2\sqrt{3}) \cdot \sin(15^\circ) = \sqrt{2}(r+2\sqrt{3}) \cdot \frac{(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}} =$$

$$r = \frac{\sqrt{3}r + 2\cdot\sqrt{3}^2 - 2\sqrt{3} - r}{2}$$

$$2r = r(\sqrt{3}-1) + 6 - 2\sqrt{3}$$

$$2r - r(\sqrt{3}-1) = 6 - 2\sqrt{3}$$

$$r(2 - \sqrt{3} + 1) = 6 - 2\sqrt{3}$$

$$r = \frac{6 - 2\sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} = \frac{2\cancel{(3-\sqrt{3})}}{\cancel{3-\sqrt{3}}} = 2$$

$\boxed{\text{Ответ: 2}}$

Задание 5:

$$(k^2-2k-35)x^2+(3k-9)x+2=0$$

$$(k+5)(k-7)x^2+(3k-9)x+2=0$$

$$D=(3k-9)^2-8(k^2-2k-35)\cancel{\geq 0}=9k^2-54k+81-8k^2+16k+280=$$
$$=k^2-38k+361=(k-19)^2 \qquad \sqrt{D}=k-19$$

Найдем $x_1; x_2$ по формуле дискриминанта:

$$8\le k\le 13$$

$$x_1=\frac{9-3k+k-19}{(k+5)(k-7)}=\frac{-2k-10}{(k+5)(k-7)}=\frac{-2\cancel{(k+5)}}{\cancel{(k+5)}(k-7)}=\frac{-2}{k-7}$$

$$x_2=\frac{9-3k-k+19}{(k-7)(k+5)}=\frac{28-4k}{(k-7)(k+5)}=\frac{-4\cancel{(k-7)}}{\cancel{(k-7)}(k+5)}=\frac{-4}{k+5}$$

~~тогда~~ Найдем случае, когда верно неравенство:

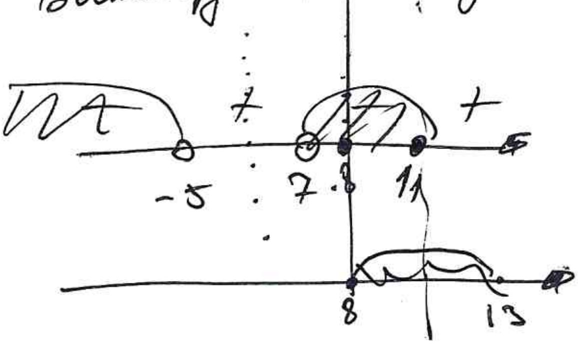
$$x_1\le 2x_2$$

$$\frac{-2}{k-7}\le -\frac{8}{k+5} \qquad \frac{-2}{k-7}+\frac{8}{k+5}\le 0$$

$$\frac{-2k-10+8k-56}{(k-7)(k+5)}\le 0$$

$$\frac{6k-66}{(k-7)(k+5)}\le 0 \qquad \frac{6(k-11)}{(k-7)(k+5)}\le 0 \qquad \frac{k-11}{(k-7)(k+5)}\le 0$$

Воспользуемся методом интервалов:



$\Rightarrow [8;11]$ нас устраивают решения

Пускай i - ~~множество~~ количество чисел в $[n;k]$, где $k-n=1$

тогда в $[8;13]$ - $6i$ чисел

в $[8;11]$ - $4i$ чисел

$$8\le k\le 13$$

Значит k может принимать $6i$ значений, нас устраивают $4i$ исходов, тогда $P=\frac{4i}{6i}=\frac{2}{3}\approx 0,666667$

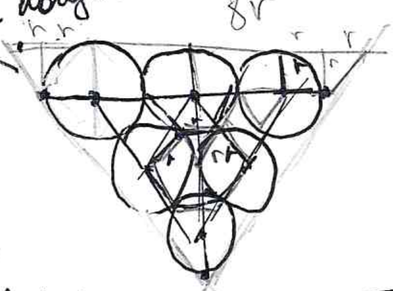
$\boxed{\text{Ответ: } \frac{2}{3} \text{ или } 0,(6)}$

6) Нарисуем как будет выглядеть пирамида.

3 ярус: 1)  2)  3) о

Найдем грань правильного тетраэдра в который можно вписать этот шестиугольник:
r – радиус шара из которых составлена пирамида

на серединах радиусов лежат



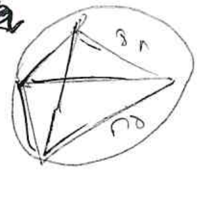
так в центре образуется правильный шестиугольник

Сначала заметим, что все ячейки одинаковы и условно их можем свести на тетраэдр с гранью r

$r_к$ – конечный радиус, вот он равен радиусу вписанного шара в тетраэдр со стороной r

Алгоритм решения:
- выразим ~~R через~~
$\sqrt{6}+1$ через ~~R~~ r (не успел) (рассмотрим пирамиду как единую)
- затем найдем $r_к$ в тетраэдре с гранью r

Сам шар впишем в тетраэдр с гранью ~~8R~~ (пирамиду)



Я понял как решать, но не успел решить численно

:(((