



ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E=mc^2$$



ШИФР

120682

120682

Бланк олимпиадной работы

Класс 11 Вариант 22 Дата Олимпиады 12.02.2023

Площадка написания АЭТИ

ОЦЕНКА

(заполняется проверяющим)

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	0	12	10	18	0					45	сорок пять	



Бланк олимпиадной работы

Задание 1.

Найти $\frac{a^{12} + 4096}{64a^6}$, если $\frac{a}{2} - \frac{2}{a} = 3$

Преобразуем $\frac{a}{2} - \frac{2}{a} = 3$ в квадрат уравнение

$$\frac{a^2 - 4}{2a} = 3 \quad \begin{cases} a^2 - 4 = 6a \\ a \neq 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a^2 - 6a - 4 = 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$$

Теперь перейдем к уравнению $\frac{a^{12} + 4096}{64a^6}$

$$2) \frac{(a^6 - 2^6)^2 + 128a^6}{64a^6} = \frac{(a^6 - 2^6)^2}{64a^6} + 2$$

$$3) \text{ Рассмотрим левую часть}$$

$$\frac{(a^6 - 2^6)^2}{64a^6} = \frac{(a^3 - 2^3)^2 (a^3 + 2^3)^2}{64a^6} = \frac{(a^2 - 4)^2 (a^3 + 2a + 4)^2 (a^3 - 2a - 4)^2}{64a^6}$$

$$= \frac{(a^2 - 4)^2 (a^3 + 2a + 4)^2 (a^3 - 2a - 4)^2}{64a^6}$$

$$= \frac{9}{16a^4} (a^3 + 2a + 4)^2 (a^3 - 2a - 4)^2$$

т.к. по п. I $a^2 = 6a + 4$, то

$$= \frac{9}{16a^4} (8a + 8)^2 (4a + 8)^2 = \frac{9 \cdot 64 \cdot 16}{16a^4} (a + 1)^2 (a + 2)^2 =$$

$$= \frac{9 \cdot 64}{a^4} (a + 1)^2 (a + 2)^2 = \frac{9 \cdot 64}{a^4} ((a + 1)(a + 2))^2$$

б) рассмотрим $(a + 1)(a + 2) = a^2 + a + 2a + 2 = a^2 + 3a + 2$

значит, что $a^2 - 6a - 4 = 0$, преобразуем его в $a^2 + 3a + 2$

по п. 3 $\frac{9 \cdot 64}{a^4} ((a + 1)(a + 2))^2 = \frac{9 \cdot 64}{a^4} (a^2 + 3a + 2)^2 = \frac{9 \cdot 64}{a^4} \cdot 9 (3a + 2)^2 =$

т.к. $a^2 = 6a + 4$

$$\frac{a^2}{2} = 3a + 2 \quad \frac{a^2}{4} = (3a + 2)^2 = \frac{81 \cdot 64}{a^4} \cdot \frac{a^4}{4} = \frac{81 \cdot 64}{4} = 81 \cdot 16 = 1296$$

5) так $\frac{(a^6 - 2^6)^2}{64a^6} + 2$, где $\frac{(a^6 - 2^6)^2}{64a^6} = 1296$, то $1296 + 2 = 1298$

1) $a^{12} + 4096$ можно разложить и как квадрат суммы и как квадрат разности. В свой способ я пойду через квадрат разности

$$a^{12} + 4096 = (a^6)^2 + (2^6)^2 - 2 \cdot a^6 \cdot 2^6 + 2 \cdot a^6 \cdot 2^6$$

$$= (a^6 - 2^6)^2 + 2 \cdot 64a^6 = (a^6 - 2^6)^2 + 128a^6$$

$a^6 - 2^6$ — это разность квадратов
 $a^6 - 2^6 = (a^3 - 2^3)(a^3 + 2^3)$
 это же, в свою очередь — разность и сумма кубов

$$a^3 - 2^3 = (a - 2)(a^2 + 2a + 4)$$

$$a^3 + 2^3 = (a + 2)(a^2 - 2a + 4)$$

$(a - 2)(a + 2)$ — разность квадратов

$$(a - 2)(a + 2) = a^2 - 4, \text{ где по п. I}$$

$$a^2 - 4 = 6a, \text{ или } \frac{a^2 - 4}{2a} = 3,$$

тогда $\frac{(a^2 - 4)^2}{4a^2} = 9$

≤ 0

$$a^2 + 3a + 2 = a^2 - 6a + 4 + 9a + 6$$

$$a^2 + 3a + 2 = 9a + 6 = 3(3a + 2)$$

Ответ: 1298



Бланк олимпиадной работы

Задание 3.

$$\begin{cases} x^2 - 23y + 66z + 612 = 0 \\ y^2 + 62x - 20z + 296 = 0 \\ z^2 - 22x + 67y + 505 = 0 \end{cases}$$

т.к. никаких красивых комбинаций не видно, то сложим все уравнения!

$$x^2 + y^2 + z^2 - 23y + 66z + 62x - 20z - 22x + 67y + 612 + 296 + 505 = 0$$

$$x^2 + 40x + y^2 + 44y + z^2 + 46z + 612 + 296 + 505 = 0$$

распределим x, y, z по группам

уже начинают просматриваться полные квадратные уравнения. Дороем их до полных

$$\frac{x^2 + 40x + 400}{10^2} + \frac{y^2 + 44y + 484}{22^2} + \frac{z^2 + 46z + 529}{23^2} + 1413 = 400 + 484 + 529 = 0$$

$$(x+20)^2 + (y+22)^2 + (z+23)^2 = 0$$

если сумма квадратов равна 0, то каждый квадрат равен 0, так как $(\dots)^2 > 0$!

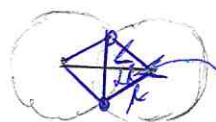
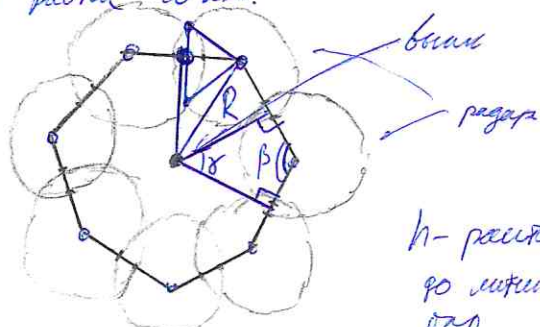
$$\begin{cases} (x+20)^2 = 0 \\ (y+22)^2 = 0 \\ (z+23)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+20=0 \\ y+22=0 \\ z+23=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-20 \\ y=-22 \\ z=-23 \end{cases}$$

т.к. корни $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$ не подходят, то ответ $(-20; -22; -23)$

Ответ: $(-20; -22; -23)$, либо $\begin{cases} x=-20 \\ y=-22 \\ z=-23 \end{cases}$

Задание 4.

Чтобы рационально расположить радары необходимо разместить их в вершины правильного семиугольника. Но чтобы кольцо, которое покрывают радары имело ширину 20 км, необходимо накладывать окружности так, чтобы линия, соединяющая точки пересечения 2-х окружностей была равна 20 км.

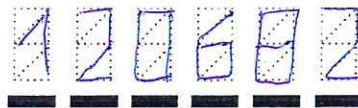


R - 26 км (радиус радара)
 L - разл. между радарами

рассмотрим ситуацию с 2-мя радарами

$$\sin \angle = \frac{10}{26} = \frac{5}{13} \quad \cos \angle = \sqrt{1 - \sin^2 \angle} = \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \frac{12}{13}$$

$$\begin{aligned} h &= \text{расстояние от центра радара} \\ \text{по катету правого треугольника} &= 26 \cdot \frac{12}{13} = 48 \text{ км} \\ \text{отр} \quad h &= \frac{L}{2} = 24 \text{ км} \end{aligned}$$



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Бланк олимпиадной работы

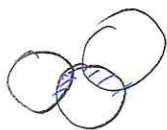
Прод задания №4

Угол между отрезками касательных к окружности = β , а угол, кот. центр окружности между 2-ми радиусами к отрезкам = γ

$$360 = \gamma \cdot n \quad \text{где } n = 4, \quad \angle \gamma = \frac{360}{4} = 90^\circ$$

$$\sin \gamma = \frac{h}{R} \quad R = \frac{h}{\sin \gamma} = \frac{24}{\sin 45^\circ}$$

Итак, все площади концы, которые касаются радиусов, необход. знать. Площадь γ , где границы касаются одну и ту же точку.



$$S_{\Delta} = S_{\square} + S_{\Delta}$$

$$S_{\square} = \frac{\pi r^2 \gamma}{360} = \frac{\pi r^2 \gamma}{180} = \frac{676\pi \gamma}{180}$$

$$S_{\Delta} = \frac{h^2 \sin \gamma}{2} = 24 \cdot 5 = 120$$

$$\gamma = \arcsin \frac{5}{13}$$

$$\Delta S = \frac{676\pi \gamma}{180} - 120 = \frac{56}{15} \pi \arcsin \left(\frac{5}{13} \right) - 120$$

$$S_{\square} = 4 \cdot \left(\frac{676\pi}{15} - \frac{56}{15} \pi \arcsin \left(\frac{5}{13} \right) + 120 \right) = 4752\pi - \frac{92}{15} \pi \arcsin \left(\frac{5}{13} \right) + 840$$

Ответ: 1) Радиус от центра окружности до радиуса: $R = \frac{24}{\sin 45^\circ}$

2) площадь: $S = 4752\pi - \frac{92}{15} \pi \arcsin \left(\frac{5}{13} \right) + 840$

Задача №5. $k \in [3; 8]$

$$(k^2 - 2k - 3)x^2 + (3k - 5)x + 2 = 0 \quad \text{Услови } x_1 \in [2; 4]$$

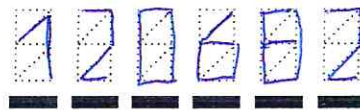
$$D = (3k - 5)^2 - 4 \cdot 2(k^2 - 2k - 3) = 9k^2 - 30k + 25 - 8k^2 + 16k + 24 = k^2 - 14k + 49 = (k - 7)^2$$

$$x_{1,2} = \frac{-3(k-5) \pm \sqrt{(k-7)^2}}{2(k^2 - 2k - 3)} = \frac{-3k + 5 \pm (k - 7)}{2(k^2 - 2k - 3)}$$



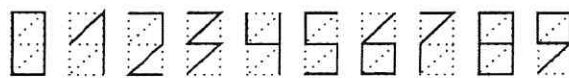
ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

ШИФР



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Бланк олимпиадной работы

Продолжение № 5

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-3k+5-k+7}{2k^2-4k-6} \\ x_2 = \frac{-3k+5+k-7}{2k^2-4k-6} \end{cases}$$

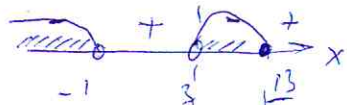
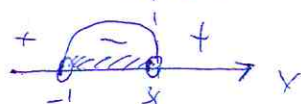
$$\begin{cases} x_1 = \frac{-4k+12}{2(k^2-2k-3)} \\ x_2 = \frac{-2k-2}{2(k^2-2k-3)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-2k+6}{k^2-2k-3} \\ x_2 = \frac{-k-1}{k^2-2k-3} \end{cases}$$

Для нижних частей равенств и при одних значениях k будет принимать одинаковые значения, то можно рассмотреть верхнюю

$$x \leq x_1 \quad \begin{cases} \frac{-2k+6}{k^2-2k-3} \leq \frac{-2k-2}{k^2-2k-3} \\ \frac{-k-1}{k^2-2k-3} \leq \frac{-4k+12}{k^2-2k-3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{8}{k^2-2k-3} \leq 0 \\ \frac{3k-13}{k^2-2k-3} \leq 0 \end{cases}$$



$$\frac{\frac{13}{3}-3}{8-3} = \frac{\frac{13-9}{3}}{5} = \frac{4}{15}$$

$$k^2-2k-3=0$$

$$D = 4+4 \cdot 3 = 16$$

$$k_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2} = 1 \pm 2$$

$$\begin{cases} k = 3 \\ k = -1 \end{cases}$$

$$3k-13=0$$

$$k = \frac{13}{3}$$

Ответ: вероятность того, что точка будет удовлетворять условию $x_1 \leq x_2$ на отрезке от $[\frac{13}{3}; 8] = \frac{4}{15}$