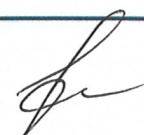


Класс 10 Вариант 012 Дата Олимпиады 19.02.2022

Площадка написания МБОУ г. Мурманска гимназия N°10

| Задача | 1 | 2 | 3  | 4 | 5  | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | $\Sigma$ |                 | Подпись                                                                             |
|--------|---|---|----|---|----|---|---|---|---|----|----------|-----------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
|        |   |   |    |   |    |   |   |   |   |    | Цифрой   | Прописью        |                                                                                     |
| Оценка | 0 |   | 15 |   | 20 | 0 |   |   |   |    | 35       | ТРИЦАТЬ<br>ПЯТЬ |  |

③ Дано:  $f(x)$  :  $f\left(\frac{a+2b}{3}\right) = \frac{f(a) + 2f(b)}{3}$   
 $f(1) = 1$   
 $f(4) = 7$

найти: знач.  $f(2021)$

Решение:  $f(x)$  — линейная ф.  $f(x) = kx + b$   
 тогда  $\begin{cases} f(1) = k + b \\ f(4) = 4k + b \end{cases} ; \begin{cases} k + b = 1 \\ 4k + b = 7 \end{cases} ; \begin{cases} k = 1 - b \\ 4(1 - b) + b = 7 \end{cases}$

$\begin{cases} k = 1 - b \\ -3b = 3 \end{cases} ; \begin{cases} k = 2 \\ b = -1 \end{cases} ; f(x) = 2x - 1$

тогда  $f\left(\frac{a+2b}{3}\right) = \frac{2a+4b}{3} - 1$ ;

$f(a) = 2a - 1$

$f(2b) = 4b - 1$

$2f(b) = 2(2b - 1) = 4b - 2$ , проверим подстановкой:

$\frac{f(a) + 2f(b)}{3} = f\left(\frac{a+2b}{3}\right)$

$\frac{2a - 1 + 4b - 2}{3} = \frac{2a + 4b}{3} - 1$

$\frac{(2a + 4b) - 3}{3} = \frac{2a + 4b}{3} - 1$

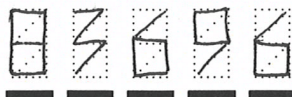
$\frac{2a + 4b}{3} - 1 = \frac{2a + 4b}{3} - 1$

тогда, действительно,  $f(x) = 2x - 1$  — линейная ф.

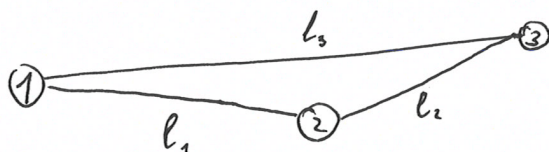
$f(2021) = 2 \cdot 2021 - 1 = 4042 - 1 = 4041$

Ответ: 4041

15



5



по условию:

$$\begin{cases} l_1 + l_2 = 3l_3 \\ l_3 + l_2 = a + l_1 \\ l_3 + l_1 = 60 \end{cases}$$

найдем расстояние  $l_1$ ;  $l_2$ ;  $l_3$  где  $a = 42$  (задача из укр.)

$$\begin{cases} l_1 + l_2 = 3l_3 & (1) \\ l_2 + l_3 = l_1 + 42 & (2) \\ l_1 + l_3 = 60 & (3) \end{cases}$$

(1):  $l_1 = 3l_3 - l_2$ ,

(2):  $l_2 + l_3 = 3l_3 - l_2 + 42$   
 $2l_2 - 2l_3 = 42$   
 $l_2 - l_3 = 21$

$$\begin{cases} l_2 - l_3 = 21 \\ l_1 + l_3 = 60 \end{cases} ; \begin{cases} l_3 = 21 + l_2 \\ l_1 + l_3 = 60 \end{cases} ; \begin{cases} l_3 = -21 + l_2 \\ l_1 + \cancel{l_3} + l_2 - 21 = 60 \end{cases} \begin{cases} l_3 = l_2 - 21 \\ l_1 + l_2 = 81 \end{cases}$$

→ (1)  $\begin{cases} l_1 + l_2 = 3l_3 \\ l_1 + l_2 = 81 \end{cases} ; 3l_3 = 81$   
 $\boxed{l_3 = 27} \text{ (км)}$

(3):  $l_1 + l_3 = 60$   
 $l_1 = 60 - 27$   
 $\boxed{l_1 = 33} \text{ (км)}$

(1):  $l_1 + l_2 = 3l_3$   
 $33 + l_2 = 81$   
 $\boxed{l_2 = 48} \text{ (км)}$

рассмотрим общий случай:

$$\begin{cases} l_1 + l_2 = 3l_3 \\ l_2 + l_3 = l_1 + a \\ l_1 + l_3 = 60 \end{cases}$$

(1):  $l_1 = 3l_3 - l_2$

(2):  $l_2 + l_3 = 3l_3 - l_2 + a$

$$2l_2 - 2l_3 = a$$

$$l_2 - l_3 = 0,5a$$

$$\begin{cases} l_2 - l_3 = 0,5a \\ l_1 + l_3 = 60 \end{cases} ; \begin{cases} l_3 = l_2 - 0,5a \\ l_1 + l_3 = 60 \end{cases} ; \begin{cases} l_3 = l_2 - 0,5 \\ l_1 + l_2 - 0,5a = a \end{cases}$$

$$l_1 + l_2 = (60 + 0,5a)$$

$$\rightarrow (1): \begin{cases} l_1 + l_2 = 3l_3 \\ l_1 + l_2 = 60 + 0,5a \end{cases} ; 3l_3 = 60 + 0,5a$$

$$l_3 = 20 + \frac{1}{6}a$$

20

$$(3): \begin{cases} l_1 + l_3 = 60 \\ l_1 + 20 + \frac{1}{6}a = 60 \end{cases}$$

$$l_1 = 40 - \frac{1}{6}a$$

$$(1): l_1 + l_2 = 3l_3$$

$$40 - \frac{1}{6}a + l_2 = 60 + \frac{1}{2}a$$

$$l_2 = 20 + \frac{4}{6}a$$

$$l_2 = 20 + \frac{2}{3}a$$

Т.к. кратчайшее  $l$  между точками-приемами (см. рис.), то

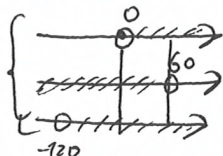
$$\begin{cases} l_1 < l_2 + l_3 \\ l_2 < l_1 + l_3 \\ l_3 < l_1 + l_2 \end{cases} ; \begin{cases} 40 - \frac{1}{6}a < 20 + \frac{2}{3}a + 20 + \frac{1}{6}a \\ 20 + \frac{2}{3}a < 40 - \frac{1}{6}a + 20 + \frac{1}{6}a \\ 20 + \frac{1}{6}a < 40 - \frac{1}{6}a + 20 + \frac{2}{3}a \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{6}a < \frac{4}{6}a + \frac{1}{6}a \\ \frac{4}{6}a < 40 - \frac{1}{6}a + \frac{1}{6}a \\ \frac{1}{6}a < 40 - \frac{1}{6}a + \frac{4}{6}a \end{cases} ; \begin{cases} -a < 0 \\ \frac{2}{3}a < 40 \\ -\frac{1}{3}a < 40 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -a < 0 \\ \frac{2}{3}a < 40 \\ -\frac{1}{3}a < 40 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a > 0 \\ a < \frac{3 \cdot 40}{2} \\ a > -\frac{3 \cdot 40}{1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a > 0 \\ a < 60 \\ a > -120 \end{cases}$$



$$a \in (0; 60)$$

Ответ:  $a \in (0; 60)$ ; при  $a = 42$

$$l_1 = 33 \text{ км}$$

$$l_2 = 48 \text{ км}$$

$$l_3 = 27 \text{ км}$$

① Решить уравнение:

$$x^9 - 2021x^3 + \sqrt{2022} = 0$$

решение:

пусть  $x^3 = t, t \in \mathbb{R}$

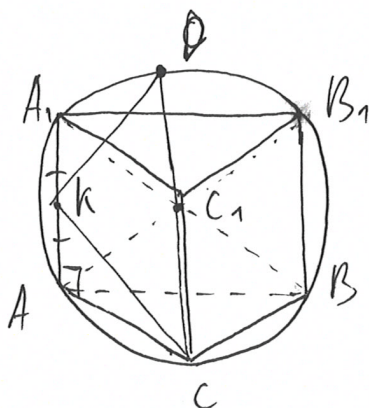
$t^3 - 2021t + \sqrt{2022} = 0$  — неверное уравнение

$$D = 2021^2 - 4\sqrt{2022} = 2021^2 - 2 \cdot 2\sqrt{2022} =$$

$$= 2021^2 - 2 \cdot \frac{2\sqrt{2022} \cdot 2021}{2021} = (2021^2 - 2 \cdot 2021 \cdot (2 \frac{\sqrt{2022}}{2021})) +$$

$$+ 4 \frac{2022}{2021^2} - 4 \frac{2022}{2021^2} = (2021 - 2 \frac{\sqrt{2022}}{2021}) - 4 \frac{2022}{2021^2}$$

⑥



Дано:  $ABCA_1B_1C_1$  — правильная  
треугольная призма  
( $ABC$ ); ( $A_1B_1C_1$ ) — основания

$$AB = BC = AC = A_1B_1 = B_1C_1 = A_1C_1$$

$$AA_1 = BB_1 = CC_1$$

$$K \in AA_1; AK = KA_1$$

$$CK = 2\sqrt{6}; DK = 4$$

найти:  $V$

Решение:

$$V = S_{ABC} \cdot AA_1$$

Рассм.  $\triangle CAK$  — прямоугол.

по т. Пифагора:  $CK = \sqrt{AK^2 + AC^2}$

$$CK = \sqrt{AK^2 + AC^2} = \sqrt{\frac{1}{4}AA_1^2 + AC^2}$$

Нет решения

①