

Класс 11 Вариант 11 Дата Олимпиады 19.02.2022

Площадка написания Тимашевка №8, город Мотла

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	05	10	10	20	20	30						90	

✓1

$$x^9 - 2021x^3 - \sqrt{2022} = 0$$

Пусть ~~$x^3 = \sqrt{2022}t$~~ $x^3 = \sqrt{2022}t$, тогда $x^9 = 2022\sqrt{2022}t^3$

$$2022\sqrt{2022}t^3 - 2021 \cdot \sqrt{2022}t - \sqrt{2022} = 0 \quad / : \sqrt{2022}$$

$$2022t^3 - 2021t - 1 = 0$$

Нетрудно догадаться, что $t=1$ является корнем, значит $x^3 = \sqrt{2022}$
 $x = \sqrt[6]{2022}$

$$f(t) = 2022t^3 - 2021t - 1 = 0$$

$$f(1) = 0 \Rightarrow f(t) = (t-1)(2022t^2 + 2022t + 1) = 0$$

$$f_1(t) = 2022t^2 + 2022t + 1 = 0$$

$$D = 2022^2 - 4 \cdot 2022 = 2022 \cdot 2018$$

$$t = \frac{-2022 \pm \sqrt{2022 \cdot 2018}}{2 \cdot 2022} = \frac{1}{2} \left(-1 \pm \sqrt{\frac{2018}{2022}} \right)$$

$$x^3 = \frac{\sqrt{2022}}{2} \left(-1 \pm \sqrt{\frac{2018}{2022}} \right) = \frac{1}{2} \left(-\sqrt{2022} \pm \sqrt{2018} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}(-\sqrt{2022} - \sqrt{2018})} \\ x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}(-\sqrt{2022} + \sqrt{2018})} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } x_1 = \sqrt[6]{2022}; x_2 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}(-\sqrt{2022} - \sqrt{2018})}; x_3 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}(-\sqrt{2022} + \sqrt{2018})}$$

5

$\sqrt{2}$

$$X_k = \frac{1}{2021-k} (X_0 + X_1 + \dots + X_{k-1}) \quad X_0 = \frac{1}{n} - \frac{1}{2021}$$

$$X_1 = \frac{X_0}{2020} = \frac{1}{2020 \cdot 2021} \quad X_2 = \frac{X_0 + X_1}{2019} = \frac{\frac{1}{2021} + \frac{1}{2020 \cdot 2021}}{2019} = \frac{2020+1}{2019 \cdot 2020 \cdot 2021} = \frac{1}{2019 \cdot 2020}$$

$$X_3 = \frac{\frac{1}{2021} + \frac{1}{2020 \cdot 2021} + \frac{1}{2019 \cdot 2020}}{2018} = \frac{2019 \cdot 2020 + 2019 + 2021}{2018 \cdot 2019 \cdot 2020 \cdot 2021} = \frac{2020 \cdot 2021}{2018 \cdot 2019 \cdot 2020 \cdot 2021} = \frac{1}{2018 \cdot 2019}$$

$$X_{k+y} = \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-k)} + \frac{1}{(n-k)(n-k-1)} + \dots + \frac{1}{(n-k-y)(n-k-y-1)}}{n-k-y-1} = \frac{(n-k-y+1)(n-k-y) \cdot \dots \cdot (n-k) + 1}{(n-k-y-1) \cdot (n-k-y) \cdot \dots \cdot (n-k) \cdot n}$$

$$\frac{(n-k-y+1)(n-k-y) \cdot \dots \cdot (n-k-1) + (n-k-y+1)(n-k-y) \cdot \dots \cdot n + \dots + (n-k-y-1) \cdot \dots \cdot (n-k) \cdot n}{(n-k-y-1) \cdot (n-k-y) \cdot \dots \cdot (n-k) \cdot n}$$

$$= \frac{1}{(n-k-y)(n-k-y-1)}$$

$$\Rightarrow S = \sum_{k=0}^n X_k = \frac{1}{2021} + \frac{1}{2021 \cdot 2020} + \frac{1}{2020 \cdot 2019} + \dots + \frac{1}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{1}{2021} + \frac{1}{2020} - \frac{1}{2021} + \frac{1}{2019} - \frac{1}{2020} + \dots + 1 - \frac{1}{2} = 1$$

Ответ $S = 1$

16

✓ 3

$$f\left(\frac{a+2b}{3}\right) = \frac{f(a) + 2f(b)}{3} \quad f(1) = 5 \quad f(4) = 2$$

$$f\left(\frac{1+2 \cdot 4}{3}\right) = f(3) = \frac{5+2 \cdot 2}{3} = 3$$

$$f\left(\frac{4+2 \cdot 1}{3}\right) = f(2) = \frac{2+2 \cdot 5}{3} = 4$$

$$f\left(\frac{a+2b}{3}\right) = \frac{1}{3}(f(a) + 2f(b)) \Rightarrow f(a) = 3f\left(\frac{a+2b}{3}\right) - 2f(b)$$

$$\Rightarrow f(2021) = 3f\left(\frac{2021+2 \cdot 2}{3}\right) - 2f(2) = 3f(675) - 8$$

$$f(675) = 3f\left(\frac{675+2 \cdot 3}{3}\right) - 2f(3) = 3f(227) - 6$$

$$f(227) = 3f\left(\frac{227+2 \cdot 2}{3}\right) - 2f(2) = 3f(77) - 8$$

$$f(77) = 3f\left(\frac{77+2 \cdot 2}{3}\right) - 2f(2) = 3f(27) - 8$$

$$f(27) = 3f\left(\frac{27+2 \cdot 3}{3}\right) - 2f(3) = 3f(11) - 6$$

$$f(11) = 3f\left(\frac{11+2 \cdot 2}{3}\right) - 2f(2) = 3f(5) - 8$$

$$f(5) = 3f\left(\frac{5+2 \cdot 2}{3}\right) - 2f(2) = 3f(3) - 2f(2) = 9 - 8 = 1$$

$$\Rightarrow f(11) = -5, f(27) = -21, f(77) = -71, f(227) = -221$$

$$f(675) = -669 \Rightarrow f(2021) = -2015$$

105 Vee

✓4

Пусть X - координата 1 места, где труба упрямела, Y - второго места.

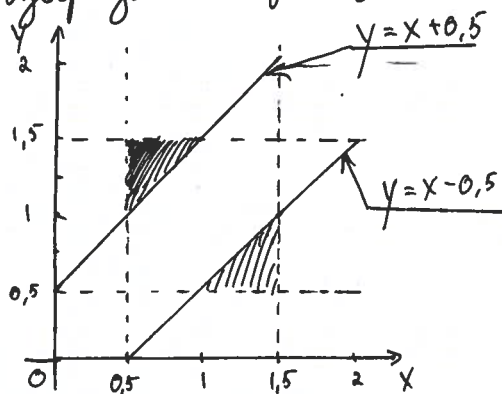
Тогда, чтобы три получившиеся части, можно было использовать в качестве отводов, т.е. получалось три отрезка ^{каждый} с длиной более 0,5 м, необходимо:

$$\begin{cases} 0,5 < X < 1,5 \\ 0,5 < Y < 1,5 \\ Y - X > 0,5 \\ X - Y > 0,5 \end{cases}$$

координаты должны быть удалены более чем на 0,5 м от концов труб

расстояние между координатами должно быть больше 0,5 м

Изобразим полученную систему уравнений на координатной плоскости:



Заштрихованные области показывают подходящие X и Y

Тогда вероятность использования 3-х частей в качестве отводов будет определяться отношением ^{суммарной} площади заштрихованных областей

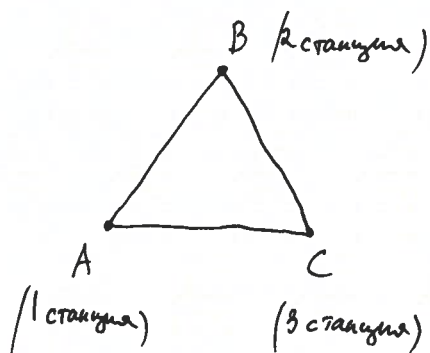
к площади квадрата со стороной 2, отвечающей за всевозможные пары координат X и Y

$$P = \frac{S}{S_{\text{кв}}} = \frac{0,25}{4} = \frac{1}{16}$$

Ответ: $P = \frac{1}{16}$

20

$\sqrt{5}$



Пусть расстояние между 1 и 2 станцией (AB) — x ;
 между 2 и 3 (BC) — y , между 1 и 3 (AC) — z ,
 тогда по условию:

$$\begin{cases} x + y = 32 \\ x + a = y + z \\ x + z = 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 60 - z + y = 32 \\ 60 - z + a = y + z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 60 + y = 42 \\ 60 + a = y + 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -60 + y - a = -2y \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = 20 + \frac{2a}{3} \Rightarrow z = 20 + \frac{a}{6} \Rightarrow x = 40 - \frac{a}{6}$$

$$\begin{cases} x = 40 - \frac{a}{6} \\ y = 20 + \frac{2a}{3} \\ z = 20 + \frac{a}{6} \end{cases}$$

При $a = 30$: $x = 35, y = 40, z = 25$

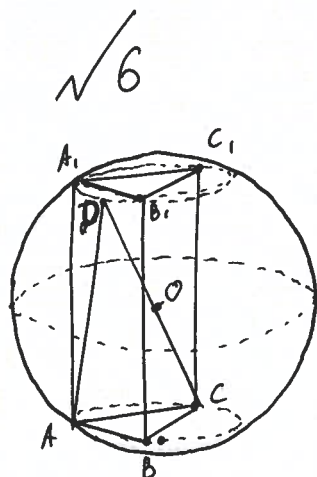
Чтобы указанное расположение станций было возможным, необходимо, чтобы выполнялось неравенство треугольника, т.е.:

$$\begin{cases} x + y > z \\ y + z > x \\ x + z > y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 40 - \frac{a}{6} + 20 + \frac{2a}{3} > 20 + \frac{a}{6} \\ 20 + \frac{2a}{3} + 20 + \frac{a}{6} > 40 - \frac{a}{6} \\ 40 - \frac{a}{6} + 20 + \frac{a}{6} > 20 + \frac{2a}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 40 > -\frac{a}{3} \\ a > 0 \\ 40 > \frac{2a}{3} \end{cases} \Rightarrow a \in (0; 60)$$

Ответ: Указанное расположение возможно при $a \in (0; 60)$

При $a = 30$: между 1 и 2 станцией — 35 км,
 между 2 и 3 — 40 км,
 между 1 и 3 — 25 км.

20



Дано $ABC A_1 B_1 C_1$ - ^{высшая} правильная трех. призма
 CD - диаметр, $R = 3$
 $AD = 2\sqrt{6}$

Найти: $V_{ABCA_1 B_1 C_1}$

Решение:

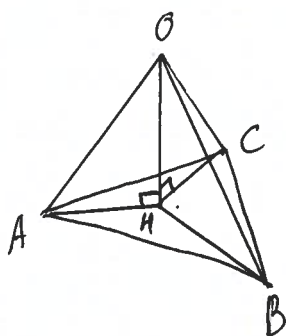
O - центр сферы

1) $\angle DAC = 90^\circ$, т.к. опирается на диаметр CD

$$\Rightarrow CD^2 = AD^2 + AC^2 \text{ (по т. Пифагора)}$$

$$AC = \sqrt{CD^2 - AD^2} = \sqrt{36 - 24} = 2\sqrt{3}$$

2) $\triangle ABC$ - правильный $\Rightarrow S_{ABC} = \frac{AC^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{12\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}$



3) Проведем $OH \perp (ABC)$

$\Rightarrow AH = HC = HB$, т.к. $OA = OC = OB$, как радиусы
(равны наклонные, равны их проекции)

$\Rightarrow H$ - центр описанной вокруг $\triangle ABC$ окружности

$$AH = r = \frac{AC}{\sqrt{3}} = 2, \text{ как радиус окружности, описан. вокруг правильного } \triangle ABC$$

$$\Rightarrow OH = \sqrt{AO^2 - AH^2} = \sqrt{5}$$

4) $V_{ABCA_1 B_1 C_1} = S_{ABC} \cdot AA_1$ $AA_1 = 2 \cdot OH$, т.к. призма правильная

$$\Rightarrow V_{ABCA_1 B_1 C_1} = 2 S_{ABC} \cdot OH = 2 \cdot 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} = 6\sqrt{15}$$

Ответ $V_{ABCA_1 B_1 C_1} = 6\sqrt{15}$

50