ГАЗПРОМ
ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

ШИФР 8 3 9 0 8

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Класс 11 **Вариант** 11 **Дата Олимпиады** 19.02.2022

Площадка написания Гимназия №8 г. Можга

Задача	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**Σ** Цифрой	**Σ** Прописью	**Подпись**
Оценка	0	10	08	00	20	30						шестьдесят восемь	

Задание 2.

$$x_0=\frac{1}{n};\ x_k=\frac{1}{n-k}(x_0+x_1+\ldots+x_{k-1});\quad k=1,2,\ \ldots,\ n-1$$

Рассмотрим, чему равны члены этой последовательности:

$$x_1=\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n(n-1)}$$

$$x_2=\frac{1}{n-2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n(n-1)}\right)=\frac{1}{n-2}\left(\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\right)=\frac{1}{n-2}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{n-1+1}{n-1}=\frac{1}{n-2}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{n}{n-}$$

$=\frac{1}{(n-1)(n-2)}$ => если разделить x_2 на $\frac{1}{n-2}$, то мы получим сумму всех предыдущих, это работает для любого x_i, $i\in[1;n-1]$

$$x_3=\frac{1}{n-3}\left(\frac{x_2(n-2)}{1}+x_2\right)=\frac{1}{n-3}\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{(n-1)(n-2)}\right)=\frac{1}{n-3}\left(\frac{n-2+1}{(n-1)(n-2)}\right)=$$

$$=\frac{1}{n-3}\cdot\frac{1}{n-2}$$

По индукции допустим, что $x_m=\frac{1}{n-m}\cdot\frac{1}{n-m+1}$, $m\in[1;n-1]$, тогда $x_{m+1}=\frac{1}{n-m-1}\left(x_m\cdot(n-m)+x_m\right)=\frac{1}{n-m-1}\cdot\left(\frac{1}{n-m+1}+\frac{1}{(n-m+1)(n-m)}\right)=$

$=\frac{1}{n-m-1}\cdot\frac{n-m+1}{(n-m+1)(n-m)}=\frac{1}{n-m-1}\cdot\frac{1}{n-m}$ => мы доказали по индукции, что для любого $m\in[1;n-1]$ $x_m=\frac{1}{n-m}\cdot\frac{1}{n-m\overset{?}{+}1}$

Задание 2 (продолжение)

Тогда $S_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-1)} + \frac{1}{(n-1)(n-2)} + \ldots + \cancel{1\cdot\frac{1}{2}}\,\frac{1}{(n-n+1)(n-n+2)}$

Заметим, что для $x \in \mathbb{Z}, x > 1$

$$\cancel{\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = \frac{x-1-x}{}}$$

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} = \frac{x-x+1}{x(x-1)} = \frac{1}{x(x-1)} \Rightarrow$$

10

$$\Rightarrow S_n = \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}\right) + \ldots + \cancel{\frac{1}{2}\frac{1}{3}} + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

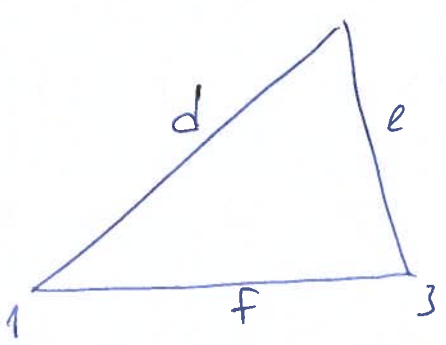
$\Rightarrow$ ~~сокращаются почти все слагаемые, кроме~~

$$S_n = \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-n+2} - \frac{1}{n-n+3}\right) + \left(\frac{1}{n-n+1} - \frac{1}{n-n+2}\right)$$

$\Rightarrow$ сокращается всё, кроме $\frac{1}{n-n+1} = 1$

Ответ: $S_{2021} = 1$.

Задание 5



Пусть у нас расстояние между станциями $1-2 = d$; $2-3 = e$; $1-3 = f$ (самая короткая дорога)

Тогда по условию:

$$\begin{cases} d+e=3f \\ e+f=a+d \\ d+f=60 \end{cases}$$

Если $a = 30$, то

$$\Rightarrow \begin{cases} d+e=3f \\ e+f=d+30 \\ d+f=60 \end{cases} \Rightarrow \quad d = 60-f \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 60-f+e=3f \\ e+f=60-f+30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 60+e=4f \\ e+2f=90 \end{cases}$$

Вычтем из первого второе

$\Rightarrow 60-2f = 4f-90 \Rightarrow 150 = 6f \Rightarrow \underline{f=25} \Rightarrow \underline{d=35} \Rightarrow$

~2

$\Rightarrow e = 40$, все числа ~~чётные~~ положительные $\Rightarrow$

Задание 5 (продолж.)

$\Rightarrow$ они нам подходят.

Рассмотрим какие значения может прини-мать

$$a: \begin{cases} d+e=3f \\ e+f=a+d \\ d+f=60 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 3f=d+e \\ a=e+f-d \\ f=60-d \end{matrix} \Rightarrow 180-3d=d+e \Rightarrow 180=4d+e \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e=180-4d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = 180-4d+60-d-d = 240-6d \Rightarrow a=6(40-d)$$

Заметим, что расстояния неотрицательны и станции ~~они~~ не лежат в одной точке $\Rightarrow d,e,f>0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} d+f>e \quad e+f>d \\ d+e>f \\ d>0 \\ f=60-d\geq 0 \\ e=180-4d\geq 0 \end{cases} \text{(из-за того что } d,e,f \text{ - стороны треуг.)} \Rightarrow \begin{cases} 60>d \\ 45>d \end{cases} \quad \begin{matrix} d>30 \\ d<60 \\ d>0 \end{matrix} \quad 40>d \quad \Rightarrow 30<d<40 \Rightarrow$$

20

$$\Rightarrow a = 6\cdot(40-d) \in (0;\ 60)$$

Ответ: $a\in(0;\ 60)$; при $a=30$ $d=35$, $e=40$, $f=25$.
расст. 1-2 расст. 2-3 расст. 1-3

Задание 1

0

$$x^9-2021x^3-\sqrt{2022}=0$$

$$t=x^3$$

$$t^2-2021t-\sqrt{2022}=0$$

?

$$D=\underset{>0}{2021^2}+\underset{>0}{4\sqrt{2022}}$$

Заметим, что это больше 0 $\Rightarrow$ корни есть.

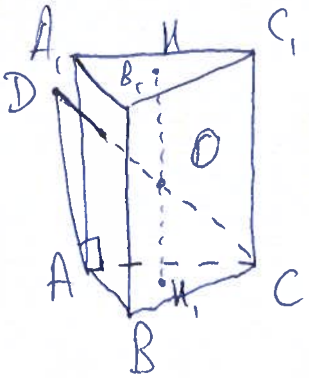
$$t=\frac{2021\pm\sqrt{2021^2+4\sqrt{2022}}}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^3=\dfrac{2021+\sqrt{2021^2+4\sqrt{2022}}}{2} \\ x^3=\dfrac{2021-\sqrt{2021^2+4\sqrt{2022}}}{2} \end{array}\right. \Rightarrow$$

Ответ:

$$\Rightarrow x=\sqrt[3]{\frac{2021+\sqrt{2021^2+4\sqrt{2022}}}{2}} \text{ и } x=\sqrt[3]{\frac{2021-\sqrt{2021^2+4\sqrt{2022}}}{2}}$$

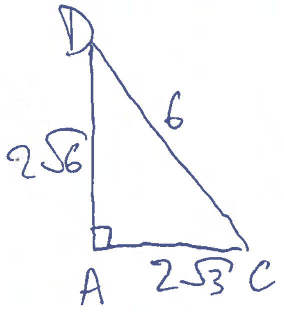
~3

Задание 6.



Дано: $r = 3$; $ABCA_1B_1C_1$ – правильная треуг. призма; $AD = 2\sqrt{6}$; CD – диаметр.

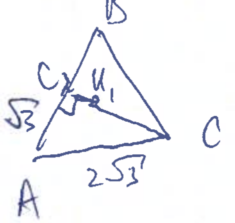
Найти: $V_{ABCA_1B_1C_1}$.



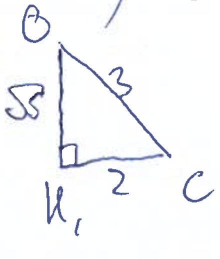
Решение: 1) Рассмотрим $\triangle CAD$: $\angle A$ – вписанный, опирающийся на диаметр $CD \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle A = 90°$; $CD = 2r = 6$ (как диаметр) $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ по теореме Пифагора $AC^2 = CD^2 - AD^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow AC = \sqrt{36 - 24} = 2\sqrt{3}$

2) Заметим, что (O – центр сферы) $ABCA_1B_1C_1$ – правильная треугольная призма $\Rightarrow$ O находится в центре призмы $\Rightarrow$ построим перпендикуляр к ABC, проходящий через O: HH_1; $H \in A_1B_1C_1$; $H_1 \in ABC \Rightarrow$
$\Rightarrow HH_1$ – высота призмы и $OH = H_1O$.

3) H_1 – центр $\triangle ABC$, а ABC – правильный $\Rightarrow H_1 \in$ медиане CC_2 и $H_1C : H_1C_2 = 2$ (по св-ву пересечения медиан).
$\Rightarrow CC_2 =$ медиане $=$ высоте (т.к. треугольник правильный) $\Rightarrow CC_2 = \sqrt{AC^2 - AC_2^2} = \sqrt{12 - 3} = 3 \Rightarrow H_1C = \frac{2}{3}CC_2 = 2$
(C_2 – середина $AB \Rightarrow AC_2 = C_2B = \frac{1}{2}AC$)



4) Рассмотрим OH_1C: $OC = r = 3$; $H_1C = 2$; $OH_1 \perp H_1C \Rightarrow$
$\Rightarrow OH_1 = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5} \Rightarrow H_1H = 2 \cdot OH_1 = 2\sqrt{5} \Rightarrow$
$\Rightarrow V_{ABCA_1B_1C_1} = S_{ABC} \cdot H_1H = 2\sqrt{5}\, S_{ABC}$.



5) $S_{ABC} = CC_2 \cdot AB \cdot \frac{1}{2} = 3 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = 3\sqrt{3} \Rightarrow V = 2\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{3} =$
$= 6\sqrt{15}$. Ответ: $6\sqrt{15}$.

30

Задание 3

$f(1)=5 \quad f(4)=2 \quad f\left(\frac{a+2b}{3}\right)=\frac{f(a)+2f(b)}{3}$

$f(2021)$ - ?

$f\left(\underbrace{\frac{1+2\cdot 4}{3}}_{=3}\right)=\frac{5+2\cdot 2}{3} \Rightarrow f(3)=3$

$f\left(\underbrace{\frac{4+2\cdot 1}{3}}_{=2}\right)=\frac{2+2\cdot 5}{3} \Rightarrow f(2)=4$

Т.е: $f(1)=5$

$f(2)=4$ По индукции докажем, что

$f(3)=3$ если $f(i)=6-i$ и $f(j)=6-j \Rightarrow$

$f(4)=2$

$\Rightarrow f\left(\frac{i+2j}{3}\right)=\frac{6-i+12-2j}{3} \Rightarrow f\left(\frac{i+2j}{3}\right)=6-\frac{i+2j}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ для любого $m\in[1;+\infty)$; $f(m)=6-m \Rightarrow$?

$\Rightarrow f(2021)=6-2021=-2015.$

⑧ нет строгого обоснования общей формулы!

Ответ: $-2015.$

Задание 4

Всего 2 м = 200 см, будем считать кол-во вариантов в см, т.к. точность будет достаточно высока. $\Rightarrow$ Всего вариантов появления ржавчины $=$

$=\frac{199\cdot 198}{2}=19701$

Ответ: 0,125.

? ⓪

~5