

Д. м. с. т.

Бланк олимпиадной работы

+ 1 Класс 11 Вариант 21 Дата Олимпиады 12.02.2023

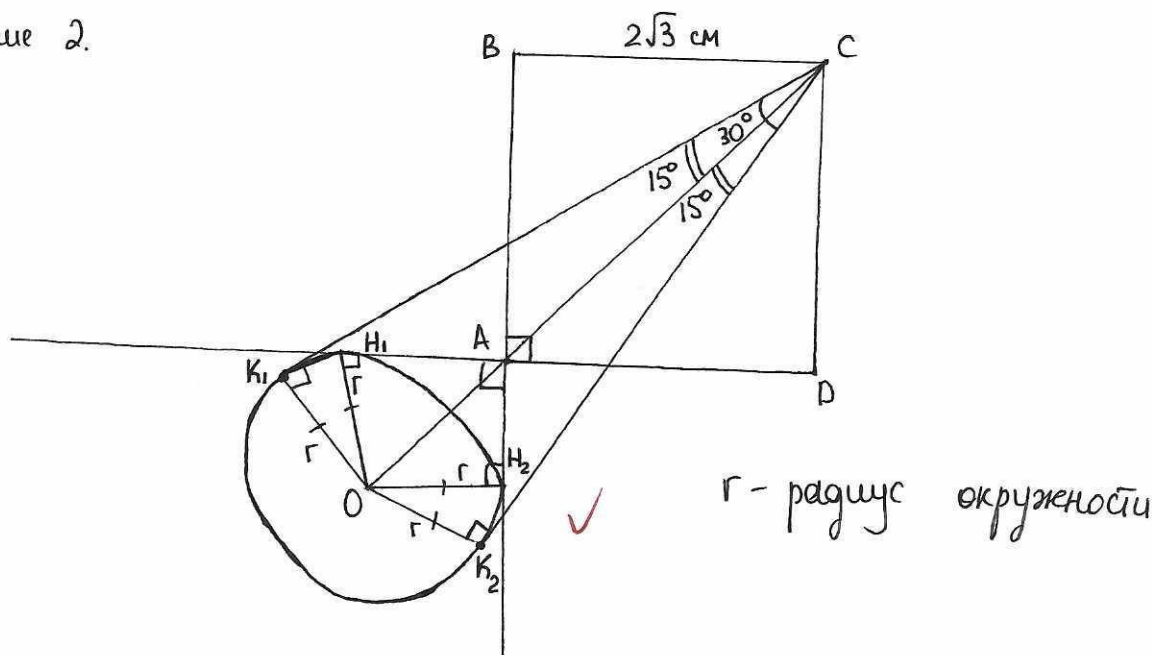
f 1 Площадка написания МГТУ им. Баумана

ОЦЕНКА

(заполняется проверяющим)

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	10	15	20	2	—					52	пятьдесят два	<i>[Signature]</i>

Задача 2.



Решение:

- ① $CK_1 = CK_2$ как отрезки касательных
 $OK_1 = OK_2 = r$ (радиусы окружности)
 CO - общая
 $\Rightarrow \triangle COK_1 = \triangle COK_2$
 по 3-м сторонам
- Значит, $\angle K_1CO = \angle K_2CO = \frac{\angle K_1CK_2}{2} = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ$
- ② 1) $AN_1 = AN_2$ как отрезки касательных
 2) $OH_1 = OH_2 = r$
 3) $\angle H_1AN_2 = \angle BAD = 90^\circ$ как вертикальные углы

Бланк олимпиадной работы

4) $\angle OH_1A = 90^\circ$, $\angle OH_2A = 90^\circ$; т.к. радиус, проведённый в точку касания, $\perp$ касательной

Исходя из п. 1), 2), 3) и 4), получаем, что OH_1AH_2 - квадрат со стороной r .

③ По теореме Пифагора:

I ~~квадрат~~ $\triangle ABC$ ($\angle ABC = 90^\circ$):

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = (2\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3})^2$$

$$AC = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}$$

II $\triangle OH_1A$ ($\angle OH_1A = 90^\circ$):

$$OA^2 = OH_1^2 + AH_1^2 = r^2 + r^2$$

$$OA = r\sqrt{2}$$

④ $\triangle OK_1C$ ($\angle OK_1C = 90^\circ$, т.к. радиус, проведённый в точку касания, $\perp$ касательной):

~~$$\sin \angle K_1OC = \frac{K_1O}{OC}$$~~

$$\sin \angle K_1CO = \frac{K_1O}{OC} \quad (OC = OA + AC = r\sqrt{2} + 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}) \quad \checkmark$$

$$\sin 18^\circ = \frac{r}{r\sqrt{2} + 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}$$

$$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{r}{r\sqrt{2} + 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}$$

$$\frac{\sqrt{3}-1}{2} = \frac{r}{r+2\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{3}r - r + 6 - 2\sqrt{3} = 2r$$

$$2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1) = 3r - \sqrt{3}r$$

~~$$2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1) = \sqrt{3}r(\sqrt{3}-1)$$~~

$$r = 2$$

Ответ: 2. $\checkmark$

(10)

Задача 3.

$$\begin{cases} x^2 - 22y - 69z + 703 = 0 \\ y^2 + 23x + 23z - 1473 = 0 \\ z^2 - 63x + 66y + 2183 = 0 \end{cases}$$

Сложим все 3 уравнения.



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Бланк олимпиадной работы

$$x^2 - 40x + y^2 + 44y + z^2 - 46z + 1413 = 0 \quad \checkmark$$

$$(x-20)^2 + (y+22)^2 + (z-23)^2 - 20^2 - 22^2 - 23^2 + 1413 = 0$$

$$(x-20)^2 + (y+22)^2 + (z-23)^2 = 0$$

Чтобы сумма квадратов равнялась 0, нужно, чтобы каждый квадрат равнялся 0. Отсюда:

$$\begin{cases} x = 20 \\ y = -22 \\ z = 23 \end{cases} \quad \checkmark$$

Ответ: $x = 20, y = -22, z = 23$. $\checkmark$ (15)

Задание 1.

$$\frac{a^{12} + 729^2}{729 a^6} = \frac{a^6}{729} + \frac{729}{a^6} = \left(\frac{a}{3}\right)^6 + \left(\frac{3}{a}\right)^6 \quad \checkmark$$

Пусть $\frac{a}{3} = t$. Тогда $\frac{3}{a} = \frac{1}{t}$.

Значит, нам нужно найти значение следующей суммы:

$$t^6 + \frac{1}{t^6}$$

Нам дано, что: $\frac{a}{3} - \frac{3}{a} = 2$

$$t - \frac{1}{t} = 2$$

$$t^2 - 1 = 2t$$

$$t^2 - 2t - 1 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 1 + 1 = 2$$

$$\begin{cases} t = 1 + \sqrt{2} \\ t = 1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

I случай.

$$t = 1 + \sqrt{2}$$

Посчитаем $t^6 = (1 + \sqrt{2})^6 = 1 + 6\sqrt{2} + \overset{30}{15 \cdot 2} + 20 \cdot 2\sqrt{2} + \overset{60}{15 \cdot 4} + 6 \cdot 4\sqrt{2} + 8 =$

$$= 99 + 70\sqrt{2}$$

Посчитаем

$$\frac{1}{t^6} = \frac{1}{99 + 70\sqrt{2}} = \frac{99 - 70\sqrt{2}}{(99 + 70\sqrt{2})(99 - 70\sqrt{2})} = \frac{99 - 70\sqrt{2}}{99^2 - 2 \cdot 70^2} =$$

Бланк олимпиадной работы

$$= \frac{99 - 70\sqrt{2}}{9801 - 9800} = 99 - 70\sqrt{2}$$

II случай. Посчитаем сумму: $t^6 + \frac{1}{t^6} = 99 + 70\sqrt{2} + 99 - 70\sqrt{2} = 99 \cdot 2 = 198$ ✓

$$t^0 = 1 - \sqrt{2}$$

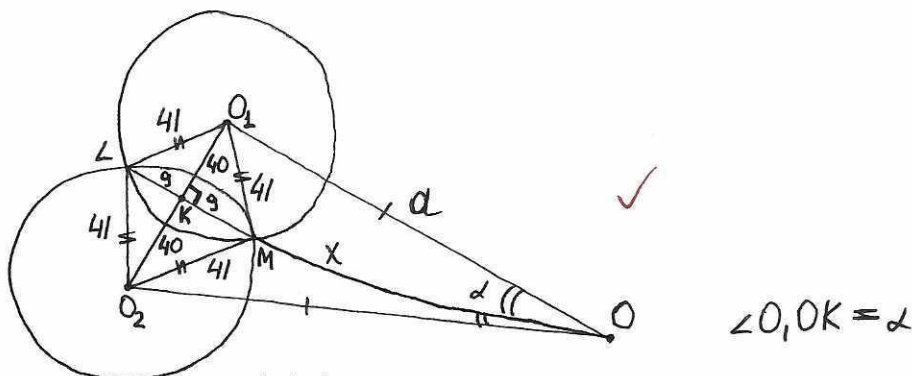
Поэтому $t^6 = (1-\sqrt{2})^6 = 1 - 6\sqrt{2} + 15 \cdot 2 - 20 \cdot 2\sqrt{2} + 15 \cdot 4 - 6 \cdot 4\sqrt{2} + 8 =$
 $= 99 - 40\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} \text{Почему} \quad \frac{1}{t^6} &= \frac{1}{99 - 70\sqrt{2}} = \frac{99 + 70\sqrt{2}}{(99 - 70\sqrt{2})(99 + 70\sqrt{2})} = \frac{99 + 70\sqrt{2}}{99^2 - 2 \cdot 70^2} = \\ &= \frac{99 + 70\sqrt{2}}{9801 - 9800} = 99 + 70\sqrt{2} \end{aligned}$$

Посчитаем сумму: $t^6 + \frac{1}{t^6} = 99 - 70\sqrt{2} + 99 + 70\sqrt{2} = 99 \cdot 2 = 198$

Ombem: 198.

Задание 4.



См. рисунок: Пусть α — максимальное расстояние от платформы до радара равно α .

~~Hyers 2 OK d. Thoro~~

~~Пусть $\angle O_1 K O_2 = 90^\circ$ и т.п.~~
 $\angle K = \angle M = \frac{1}{2} \angle L = \frac{1}{2} \cdot 18 = 9$
 в точке пересечения диагоналей ромба
 По свойству ромба: $\angle O_1 K M = 90^\circ$
 По теореме Пифагора:

По свойству ромба: $\angle O, KM = 90^\circ$

По Теореме Пифагора:
 $\Delta O, KM$ ($\angle O, KM = 90^\circ$):

$$O, M^2 \approx O, K^2 + KM^2$$

$$41^2 = 0, K^2 + g^2$$

$$O_1 K = 40$$

Бланк олимпиадной работы

Т.к. радаров всего 7, то 7 углов величины 2α составляют 360° (т.к. радары располагаются вокруг платформы). $2\alpha = \frac{360^\circ}{7}$

$$\alpha = \frac{360^\circ}{14} = \frac{180^\circ}{7} = 25\frac{5}{7}^\circ$$

$\triangle O_1KO$ ($\angle O_1KO = 90^\circ$):

$$\sin \alpha = \frac{O_1K}{a}$$

$$a = \frac{O_1K}{\sin \alpha} = \frac{40}{\sin 25\frac{5}{7}^\circ} \text{ (км)}$$

$$\cos \alpha = \frac{OK}{a}$$

$$\cos \alpha = \frac{x+9}{a}$$

$$x+9 = a \cdot \cos \alpha$$

$$x = -9 + \frac{40}{\sin \alpha} \cdot \cos \alpha = -9 + 40 \operatorname{ctg} \alpha$$

$$\begin{aligned} S_{\text{кольца}} &= S_{\text{внешнего круга}} - S_{\text{внутреннего круга}} = \pi (x+18)^2 - \pi x^2 = \\ &= \pi ((x+18)^2 - x^2) = \pi (36x + 324) = 36\pi (x+9) = 36\pi (-9 + 40 \operatorname{ctg} \alpha + 9) = \\ &= 36\pi \cdot 40 \operatorname{ctg} \alpha = 1440\pi \cdot \operatorname{ctg} 25\frac{5}{7}^\circ \text{ (км}^2\text{)} \end{aligned}$$

Ответ: 1) $\frac{40}{\sin 25\frac{5}{7}^\circ}$ км; 2) $1440\pi \cdot \operatorname{ctg} 25\frac{5}{7}^\circ$ км².

Задание 5.

По теореме Виета:

$$\begin{cases} x_1 x_2 = \frac{2}{k^2 - 2k - 35} \\ x_1 + x_2 = \frac{9 - 3k}{k^2 - 2k - 35} \end{cases}$$

Дополнительное условие: $x_1 \leq 2x_2$.

Бланк олимпиадной работы

$$8 \leq k \leq 13$$

$$64 \leq k^2 \leq 169$$

$$16 \leq 2k \leq 26$$

$$-26 \leq -2k \leq -16$$

$$24 \leq 3k \leq 39$$

$$-39 \leq -3k \leq -24$$

~~38~~

$$38 \leq k^2 - 2k \leq 153$$

$$3 \leq k^2 - 2k - 35 \leq 118$$

$$\frac{1}{3} \geq \frac{1}{k^2 - 2k - 35} \geq \frac{1}{118}$$

$$\frac{2}{3} \geq \frac{2}{k^2 - 2k - 35} \geq \frac{1}{59}$$

$$-30 \leq 9 - 3k \leq -15$$

$$-15 \geq 9 - 3k \geq -30$$

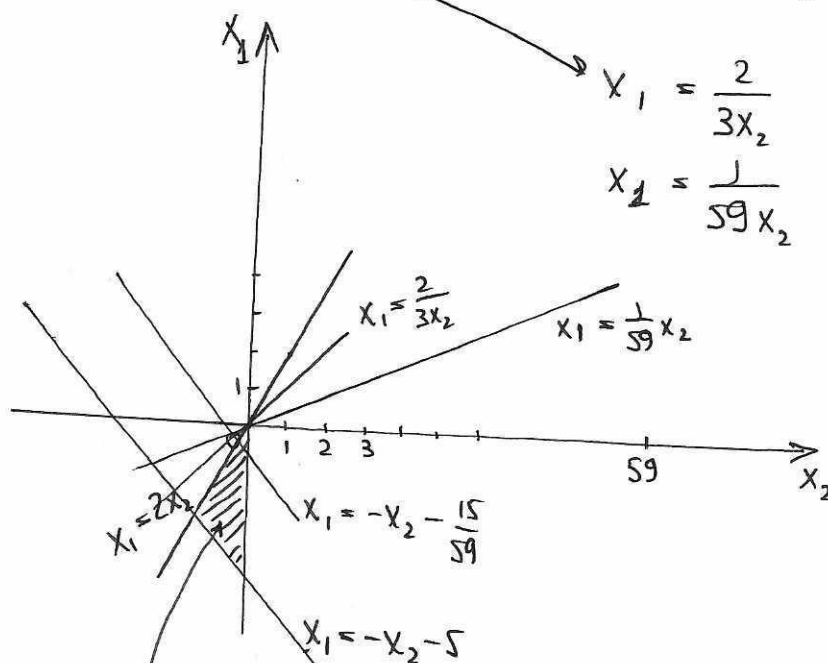
$$\frac{-5}{1} \geq \frac{9 - 3k}{k^2 - 2k - 35} \geq -\frac{15}{59}$$

$$x_1 = \frac{2}{3x_2}$$

$$x_1 = \frac{1}{59x_2}$$

$$x_1 = -x_2 - 5$$

$$x_1 = -x_2 - \frac{15}{59}$$



искомая
вероятность

?

②