

Дом. задание:

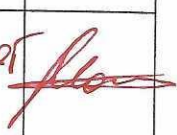
Бланк олимпиадной работы

Класс 11X Вариант 21 Дата Олимпиады 12.02.2023

Площадка написания МГТУ им. Баумана, Москва.

ОЦЕНКА

(заполняется проверяющим)

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	10	15	8	20	2					60	шестьдесят	

$\frac{a}{3} - \frac{3}{a} = 2$, пусть $\frac{a}{3} = t$, тогда $\frac{3}{a} = \frac{1}{t}$

$t - \frac{1}{t} = 2 \Rightarrow t^2 - 2t - 1 = 0$ $D = 4 + 4 = 8$

$t = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$

$\frac{a^{12} + 729^7}{72906} = \frac{(1+\sqrt{2})^{12} + 729^7}{72906}$

$\frac{a^{12} + 729^7}{72906} = \left(\frac{a}{3}\right)^6 + \left(\frac{3}{a}\right)^6 = \left(\left(\frac{a}{3}\right)^2\right)^3 + \left(\left(\frac{3}{a}\right)^2\right)^3$

$= \left(\left(\frac{a}{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{a}\right)^2\right) \left(\left(\frac{a}{3}\right)^4 - 1 + \left(\frac{3}{a}\right)^4\right)$

$\left(\frac{a}{3} - \frac{3}{a}\right)^2 = 4 = \left(\frac{a}{3}\right)^2 - 2 + \left(\frac{3}{a}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{a}{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{a}\right)^2 = 6 \checkmark$

$\left(\frac{a}{3} - \frac{3}{a}\right)^4 = \left(\left(\frac{a}{3}\right)^2 - 2 + \left(\frac{3}{a}\right)^2\right)^2 = \left(\frac{a}{3}\right)^4 + 4 + \left(\frac{3}{a}\right)^4 - 4\left(\left(\frac{a}{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{a}\right)^2\right)$

$+ 2 = \left(\frac{a}{3}\right)^4 + \left(\frac{3}{a}\right)^4 + 6 - 4 \cdot 6$

Бланк олимпиадной работы

$$\left(\frac{a}{3} - \frac{3}{a}\right)^4 = \left(\frac{a}{3}\right)^4 + \left(\frac{3}{a}\right)^4 - 18 = 16 \Rightarrow$$

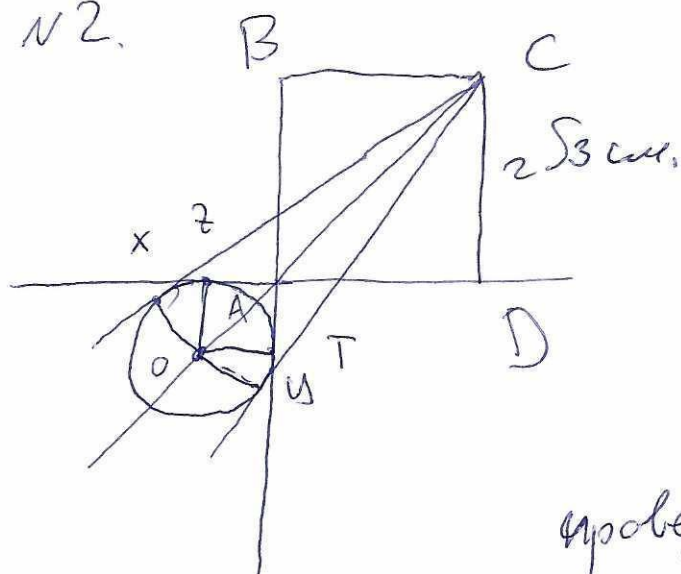
$$\Rightarrow \left(\frac{a}{3}\right)^4 + \left(\frac{3}{a}\right)^4 = 34 \checkmark$$

$$\Rightarrow \frac{a^{12} + 729^2}{72906} = \left(\left(\frac{a}{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{a}\right)^2\right) \left(\left(\frac{a}{3}\right)^4 + \left(\frac{3}{a}\right)^4 - 1\right) =$$

$$= 6 \cdot (34 - 1) = 33 \cdot 6 = 198 \checkmark$$

Ответ: 198. $\checkmark$ (5)

N2.



- 1) Центр окружности лежит на биссектрисе $\angle BAD \Rightarrow$ он лежит на прямой AC, пусть центр окружности точка O, а точка касания окружности с прямой AB, проведенными из точки C - X и Y

$OX \perp XC$, т.к. это радиус проведенный в точку касания

$\sin \angle XCO = \frac{OX}{OC}$, проведем радиусы в точку касания с AB и AD, пусть это будут точки Z и T, $OZ \perp AD$

$OY \perp AB$, $\angle ZAY = 90^\circ$, $OZ = OY = R$

$\Rightarrow OZAY$ - квадрат $\Rightarrow OA = R\sqrt{2}$, где R - радиус касшейся окружности

$AC = CD \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{6}$

Бланк олимпиадной работы

Из прямоугольного $\triangle C \times O$: $\sin \angle XCO = \frac{OX}{OC} =$
 $= \frac{OX}{OA+AC} = \frac{r}{r\sqrt{2}+AC} = \frac{r}{r\sqrt{2}+2\sqrt{6}}$

CA-биссектриса $\angle XCO$ т.к. $\angle OXC = \angle OYC \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle XCO = 15^\circ$

$\frac{r}{r\sqrt{2}+2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow r \cdot 2\sqrt{2} = \cancel{r} \cdot \sqrt{6} - r\sqrt{2} + 2\sqrt{18} - 2\sqrt{6}$

$r \cdot 2\sqrt{2} = r(\sqrt{6}-\sqrt{2}) + 6\sqrt{2} - 2\sqrt{6}$

$r(2\sqrt{2} + \sqrt{2} - \sqrt{6}) = 6\sqrt{2} - 2\sqrt{6}$

$r = \frac{6\sqrt{2} - 2\sqrt{6}}{3\sqrt{2} - \sqrt{6}} = \underline{\underline{2}}$

Ответ: $r = 2$ ✓ (10)

№5
 $(k^2 - 2k - 35)x^2 + (3k - 9)x + 2 = 0$
 $D = (3k - 9)^2 - 8(k^2 - 2k - 35) = 9k^2 - 54k + 81 - 8k^2 + 16k + 280 =$
 $= k^2 - 38k + 361 = (k - 19)^2$
 $x = \frac{9 - 3k \pm (k - 19)}{2(k^2 - 2k - 35)} = \frac{-10 - 2k}{2(k^2 - 2k - 35)} = \frac{-5 - k}{k^2 - 2k - 35}$
 $= \frac{28 - 4k}{2(k^2 - 2k - 35)} = \frac{14 - 2k}{k^2 - 2k - 35}$



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Бланк олимпиадной работы

$$a) \frac{-5-k}{(k^2-2k-35)} \leq 2 \cdot \frac{14-2k}{(k^2-2k-35)}$$

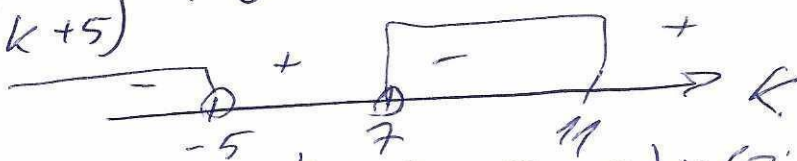
$$\frac{28-4k+5+k}{(k^2-2k-35)} \geq 0$$

$$\frac{33-3k}{k^2-2k-35} \geq 0$$

$$D = 4 + 144 = 148 = 12^2$$

$$k = \frac{2 \pm 12}{2} \Rightarrow k = 7 \text{ or } -5$$

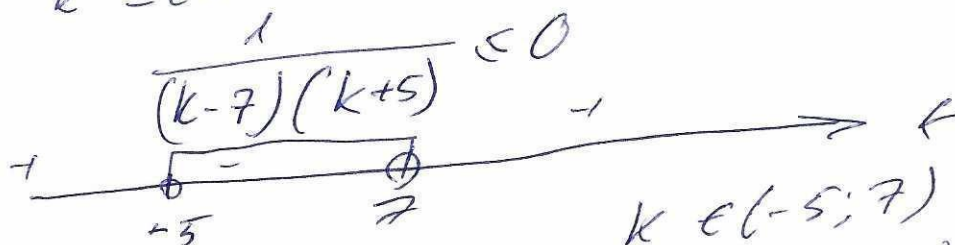
$$\frac{k-11}{(k-7)(k+5)} \leq 0$$



$$k \in (-\infty; -5) \cup (7; 11] \quad \checkmark$$

$$b) \frac{14-2k}{k^2-2k-35} \leq 2 \cdot \frac{-5-k}{k^2-2k-35}$$

$$\frac{14-2k+10+2k}{k^2-2k-35} \leq 0$$



$$k \in (-5; 7)$$

$$a) \cup b) \Rightarrow k \in (-\infty; -5) \cup (-5; 7) \cup (7; 11]$$



$$P = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{5}$$

Ответ: 0,6

(20)

Бланк олимпиадной работы

$$\begin{cases} x^2 - 22y - 69z + 703 = 0 & (1) \\ y^2 + 23x + 23z - 1473 = 0 & (2) \\ z^2 - 63x + 66y + 2153 = 0 & (3) \end{cases}$$

↓

$$(1) + (2) + (3): x^2 - 22y - 69z + 703 + y^2 + 23x + 23z - 1473 + z^2 - 63x + 66y + 2153 = 0$$

$$x^2 - 40x + y^2 + 44y + z^2 - 46z + 703 + 23z + 2153 - 1473 = 0$$

$$(x-20)^2 - 20^2 + (y+22)^2 - 22^2 + (z-23)^2 - 23^2 + 2856 - 1473 = 0$$

$$(x-20)^2 + (y+22)^2 + (z-23)^2 + 1413 - (20^2 + 22^2 + 23^2) = 0$$

$$(x-20)^2 + (y+22)^2 + (z-23)^2 \neq 1413 - \frac{(400 + 484 + 529)}{1413} = 0$$

$$(x-20)^2 + (y+22)^2 + (z-23)^2 = 0$$

↓

$$\begin{cases} x=20 \\ y=-22 \\ z=23 \end{cases}$$

Это следствие из изначальной системы $\Rightarrow$ необходимо проверить

Проверка:

$$(1): 400 + 22 \cdot 22 - 69 \cdot 23 + 703 = \checkmark$$

$$= 884 + 703 - 1587 = 0$$

$$(2): 484 + 23 \cdot 20 + 23 \cdot 23 - 1473 = \checkmark$$

$$= 484 + 460 + 529 - 1473 = 0$$

$$(3): 23 \cdot 23 - 63 \cdot 20 + 66 \cdot (-22) + 2153 =$$

$$= 529 - 1260 - 1452 + 2153 =$$

$$= 2712 - 2712 = 0 \checkmark$$

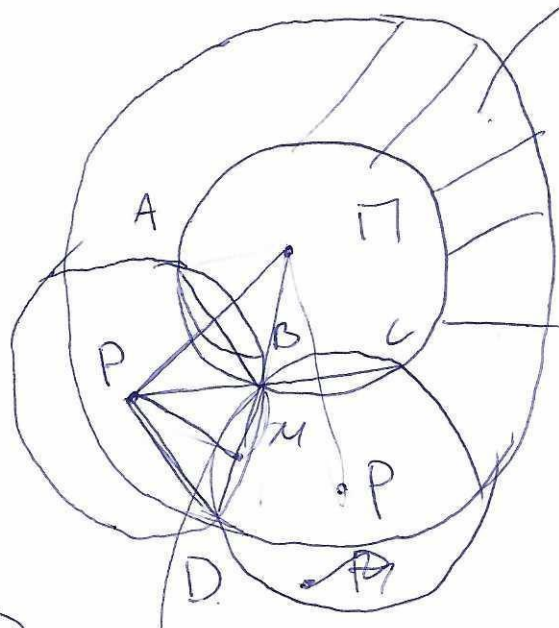
Ответ: $x=20$
 $y=-22$
 $z=23$

(15)

Бланк олимпиадной работы

мч П-матрица

Р-радар



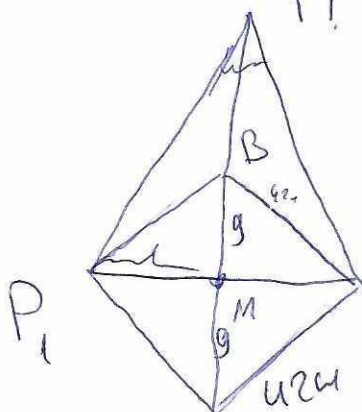
кольцо шириной 1.

$$\angle APB = \frac{1}{7} \cdot 360^\circ, \text{ т.к.}$$

радаров 7
 хорда BD - ширина
 кольца, $BD = 18 \text{ км}$
 точки П, В и D лежат
 на одной прямой

$\triangle PBD$, $PB = PD = 42 \text{ км}$, как радиусы
 пусть М - середина BD, тогда $BM = 9$, $PB = 42$
 по т. Пифагора. $PM = \sqrt{PB^2 - BM^2} = \sqrt{42^2 - 9^2} = \sqrt{17 \cdot 11 \cdot 7} = 3\sqrt{11 \cdot 17}$

Нарисуем отдельно искомый $\triangle P_1 P P_2$



$$P_1 B = BP_2 = P_2 P = P_1 P = r = 42 \text{ км} \quad \underline{42}$$

$$\angle P_1 P P_2 = \frac{360^\circ}{7}, \text{ т.к. } 7 \text{ радаров}$$

$$BM = MD = 9 \text{ по т. Пифагора. } P_1 M = \sqrt{42^2 - 9^2} = \sqrt{17 \cdot 11 \cdot 7}$$

$$= \sqrt{(42-9)(42+9)} = \sqrt{33 \cdot 51} = 3\sqrt{11 \cdot 17}$$

$$\angle P_1 P M = \frac{360^\circ}{14} = \frac{180^\circ}{7} \quad P_1 P = \frac{P_1 M}{\sin \angle P_1 P M}$$

$$= \frac{3\sqrt{11 \cdot 17}}{\sin \frac{180^\circ}{7}}$$

8

Лист 6 из 8

Ответ: $\frac{3\sqrt{11 \cdot 17}}{\sin \frac{180^\circ}{7}} \rightarrow 40 \text{ км}$
 правильное значение!

$S = ?$

Бланк олимпиадной работы

№ 6

10 шаров помещены в тетраэдр $\Rightarrow$ они помещены в правильный тетраэдр (ABCD)

O - центр тетраэдра

DO $\perp$ ABC = M, DM - высота тетраэдра

Пусть ребро тетраэдра равно L

Проведем AM до пересечения с BC в его середине X

M - центр $\triangle ABC$

$$AM = \frac{2}{3} AX = \frac{2}{3} \sqrt{AC^2 - XC^2} = \frac{2}{3} \sqrt{L^2 - \frac{L^2}{4}} = \frac{L\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$DM = \sqrt{AD^2 - AM^2} = \sqrt{L^2 - \frac{L^2}{3}} = L\sqrt{\frac{2}{3}}$$

OD = OA = радиус описанной окружности тетраэдра ADX:

Пусть AO = x $\Rightarrow$ OM = DM - x = $L\sqrt{\frac{2}{3}} - x$

$$\text{из } \triangle OAM: \left(L\sqrt{\frac{2}{3}} - x\right)^2 + \left(\frac{L}{\sqrt{3}}\right)^2 = x^2$$

$$\frac{2}{3}L^2 - 2Lx\sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{L^2}{3} = 0$$

$$L^2 = 2Lx\sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow 2x\sqrt{\frac{2}{3}} = L \Rightarrow$$

$$x = \frac{L\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

по условию

$$\frac{L\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \sqrt{6} + 1 \Rightarrow L = \frac{2\sqrt{12} + 2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Бланк олимпиадной работы

Ребро тетраэдра равно $\frac{2\sqrt{2}}{3} + 2\sqrt{2}$

Искомый шар касается $\sqrt{3}$ всех шаров тетраэдра кроме тех, что расположены в вершинах, в симметрии.

~~Найдём~~

~~Радиус Найден радиус маленького шара~~

Пусть радиус маленького шара - r

Тогда радиус искомого шара равен. $OX - 2r$

$$OM = MP - x = 2\sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

$$OX = \sqrt{OM^2 + MX^2} = \sqrt{\left(2\left(\sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

2

