



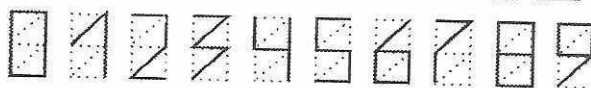
# ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР



Доп. чистовик:

+ 1.

## Бланк олимпиадной работы

Класс 11А Вариант 21 Дата Олимпиады 12.02.2023

Площадка написания МГТУ, Москва

## ОЦЕНКА

(заполняется проверяющим)

| Задача | 1 | 2  | 3  | 4 | 5  | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | $\Sigma$ |              | Подпись            |
|--------|---|----|----|---|----|---|---|---|---|----|----------|--------------|--------------------|
|        |   |    |    |   |    |   |   |   |   |    | Цифрой   | Прописью     |                    |
| Оценка | 3 | 10 | 15 | — | 20 | — |   |   |   |    | 48       | сорок восемь | <i>[Signature]</i> |

①.  $\frac{a^{12} + 729^2}{729a^6} - ?$ , если  $\frac{a}{3} - \frac{3}{a} = 2$

$$1. \frac{a^{12} + 729^2}{729a^6} = \frac{a^{12} + (3^6)^2}{3^6 \cdot a^6} = \frac{a^{12} + 3^{12}}{3^6 \cdot a^6} = \frac{a^{12}}{3^6 \cdot a^6} + \frac{3^{12}}{3^6 \cdot a^6} = \frac{a^6}{3^6} + \frac{3^6}{a^6}$$

$$2. \left(\frac{a}{3} - \frac{3}{a}\right)^2 = \frac{a^2}{9} + \frac{3^2}{a^2} - 2 \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{3}{a} = \frac{a^2}{3^2} + \frac{3^2}{a^2} - 2 = 2^2 \Rightarrow \frac{a^2}{3^2} + \frac{3^2}{a^2} = 4$$

$$3. \left(\frac{a^2}{3^2} + \frac{3^2}{a^2}\right)^3 = \frac{a^6}{3^6} + 3 \cdot \frac{a^4 \cdot 3^2}{3^4 a^2} + 3 \cdot \frac{a^2 \cdot 3^4}{3^2 a^4} + \frac{3^6}{a^6} =$$

$$= \frac{a^6}{3^6} + \frac{3^6}{a^6} + 3 \left(\frac{a^2}{3^2} + \frac{3^2}{a^2}\right) = 4^3 = 64$$

тогда  $\frac{a^6}{3^6} + \frac{3^6}{a^6} = 64 - 3 \cdot 4 = 52$   $6^3 - 3 \cdot 6 = 6 \cdot (36 - 3)$

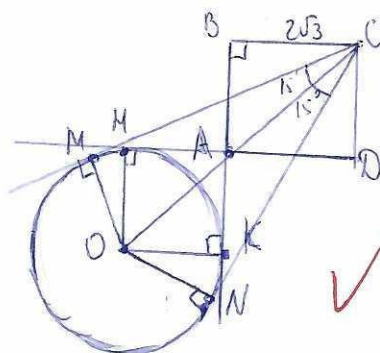
таким образом,  $\frac{a^{12} + 729^2}{729a^6} = \frac{a^6}{3^6} + \frac{3^6}{a^6} = 52$

Ответ: 52

③

# Бланк олимпиадной работы

2. Дано: окружность касается  $AB, AD$   
 $ABCD$ -квадрат  
 $AB = 2\sqrt{3}$  см  
 угол между касательными из  
 точки  $C = 30^\circ$   
 $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$



Найти:  $R$ -радиус окружности

Решение:

- Пусть окружность касается сторон (продолжений)  $AB$  и  $AD$  в точках  $K$  и  $L$  соответственно. Пусть  $O$  - центр окружности. Тогда  $OK \perp AB$  и  $OL \perp AD$ , так как  $OK$  и  $OL$  - точки касания. Отрезки  $AK = AL$ , как отрезки касательных, проведенных из одной точки к одной и той же окружности.  
 Тогда:  $OK \perp AK$   
 $OL \perp AL$   
 $OK = OL$   
 $\angle KAL = \angle BAD = 90^\circ$   
 (как вертикальные углы)  
 }  $OKAL$ -квадрат со стороной  $R$ , где  $R$ -радиус окружности  
 (Пусть  $R$ -радиус окружности)
- $AC$  - диагональ квадрата  $ABCD$ . По теореме Пифагора:  
 $AC^2 = AB^2 + BC^2$ ;  $AC = \sqrt{2BC^2} = \sqrt{2 \cdot 4 \cdot 3} = 2\sqrt{6}$  см ✓  
 $OA$  - диагональ квадрата  $OKAL$ . По теореме Пифагора:  
 $OA^2 = OK^2 + AL^2$ ;  $OA = \sqrt{2OK^2} = R\sqrt{2}$  см
- $\angle OAL = \angle OKA$  (т.к.  $OA \perp OK$  и  $OA \perp OL$ ), т.е.  $OA$ -биссектриса  $\angle KAL$   
 Аналогично  $CA$ -биссектриса угла  $\angle BCD$  ( $AB = AD$ ). Т.е.  $O, A, C$  лежат на одной прямой.
- Пусть  $CM$  и  $CN$  - касательные из  $C$  к окружности.  
 Тогда  $OM \perp CM$  и  $ON \perp CN$   
 Сино,  $\angle MCN$ -угол между касательными:  $\angle MCN = 30^\circ$

Бланк олимпиадной работы

5). Рассмотрим  $\triangle OMC$  и  $\triangle OCN$ :

а.  $\angle OMC = \angle ONC = 90^\circ$  (по п. 4)

б.  $OM = ON$  (как радиусы окружности)

в.  $CM = CN$  (как отрезки касательных)

т.о.,  $\triangle OMC = \triangle OCN$  (по двум катетам). т.е.  $\angle MCO = \angle OCN$  (как соответственные элементы). Сл-но,  $\angle MCO = \frac{1}{2} \angle MCN = \frac{1}{2} \cdot 30^\circ = 15^\circ$

6).  $\triangle OMC$ :  $\angle OMC = 90^\circ$ ,  $\sin \angle MCO = \frac{MO}{OC} = \frac{R}{AC+AO} = \frac{R}{2\sqrt{6}+R\sqrt{2}} = \sin 15^\circ$

$$\frac{R}{2\sqrt{6}+R\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$2\sqrt{2}R = (\sqrt{3}-1)(2\sqrt{6}+R\sqrt{2})$$

$$2\sqrt{2}R = 6\sqrt{2} + R\sqrt{6} - 2\sqrt{6} - R\sqrt{2}$$

$$R(3\sqrt{2} - \sqrt{6}) = 6\sqrt{2} - 2\sqrt{6}$$

$$R = \frac{6\sqrt{2} - 2\sqrt{6}}{3\sqrt{2} - \sqrt{6}} = 2 \text{ см} \quad \checkmark$$

т.о., радиус окружности равен 2 см

Ответ: 2 см  $\checkmark$

(10)

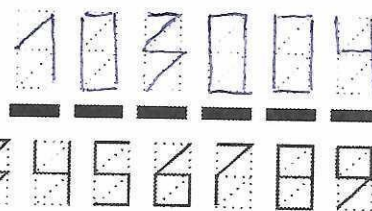
3. 
$$\begin{cases} x^2 - 22y - 69z + 703 = 0 \\ y^2 + 23x + 23z - 1473 = 0 \\ z^2 - 63x + 66y + 2183 = 0 \end{cases}$$

Сложим три уравнения системы

$$x^2 + y^2 + z^2 - 22y + 66y - 69z + 23z + 23x - 63x + 703 - 1473 + 2183 = 0$$

$$x^2 - 40x + y^2 + 44y + z^2 - 46z + 1413 = 0$$

Выделим полные квадраты для  $x, y$  и  $z$ .



**Бланк олимпиадной работы**

~~$(x-20)^2$~~

$$(x-20)^2 - 400 + (y+22)^2 - 484 + (z-23)^2 - 529 + 1413 = 0$$

$$\underbrace{(x-20)^2}_{\geq 0} + \underbrace{(y+22)^2}_{\geq 0} + \underbrace{(z-23)^2}_{\geq 0} = 0$$

т.о, сумма трёх неотрицательных чисел равна нулю.

Возможно только, если:

$$\begin{cases} x-20=0 \\ y+22=0 \\ z-23=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=20 \\ y=-22 \\ z=23 \end{cases}$$

Ответ:  $x=20$ ;  $y=-22$ ;  $z=23$

**15**

5.  $[8; 13]$  Вер-б.  $x_1, x_2$  - корни уравнения -  
 $(k^2 - 2k - 35)x^2 + (3k - 9)x + 2 = 0$

1. Если  $k^2 - 2k - 35 = 0$

$\begin{cases} k=7 \\ k=-5 \end{cases}$  - такое быть не может, т.к.  $k$  - случайно  
 полученное значение из отрезка  $[8; 13]$   
 $k=7 \notin [8; 13]$  ✓  
 $k=-5 \notin [8; 13]$

2. Если  $(k^2 - 2k - 35) \neq 0$ , то уравнение можно рассматривать как квадратное.

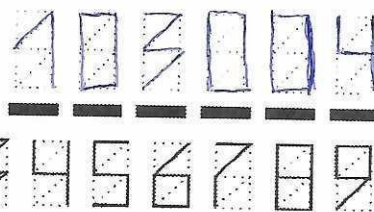
$$D = (3k-9)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (k^2 - 2k - 35) = 9k^2 + 81 - 54k - 8k^2 + 16k + 280 =$$

$$= k^2 - 38k + 361 = (k-19)^2 \geq 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-(3k-9) \pm (k-19)}{2}$$

$$x \neq \frac{-3k-9+k-19}{2} = \frac{-2k-28}{2} = -k-14$$

$$x = -7$$



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



# Бланк олимпиадной работы

$$\begin{cases} x = \frac{-3k+9+k-19}{2} = \frac{-2k-10}{2} = -k-5 \\ x = \frac{-3k+9-k+19}{2} = \frac{-4k+28}{2} = -k+14 \end{cases}$$

3. Пусть:  $x_1 = -k-5$ ,  $x_2 = -2k+14$ . По условию,  $x_1 \leq 2x_2$

$$-k-5 \leq 2(-2k+14)$$

$$-k-5 \leq -4k+28$$

$$3k \leq 33$$

$$k \leq 11. \text{ Так как } k \in [8; 13], \text{ то } k \leq 11 \rightarrow k \in [8; 11]$$

• Если  $x_1 = -2k+14$ ,  $x_2 = -k-5$ . По ус.,  $x_1 \leq 2x_2$

$$-2k+14 \leq -2k-10$$

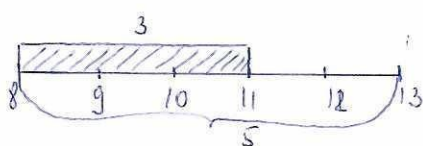
$24 \leq 0$  - неверно не имеет решений.

4. Сл-но, чтобы корни уравнения удовлетворяли условию  $x_1 \leq 2x_2$ ,

$$k \in [8; 11] \quad \checkmark$$

Вероятность того события

$$\text{составляет: } \frac{3}{5} = 0,6 \quad \checkmark$$



Ответ: 0,6  $\checkmark$

2φ

