

ШИФР

119912

Р. 1.

1123456789

+1
+1

Бланк олимпиадной работы

Класс 11 Вариант 21 Дата Олимпиады 12.02.23

+1

Площадка написания МГТУ г. Москва

ОЦЕНКА

(заполняется проверяющим)

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	4	10	15	4	20	2					55	пятьдесят пять	<i>[Signature]</i>

№1

$$\frac{a}{3} - \frac{3}{a} = 2 \Leftrightarrow a^2 - 9 = 6a \Leftrightarrow a^2 - 6a + 9 = 18 \Leftrightarrow (a-3)^2 = 18 \Rightarrow a = \sqrt{18} + 3$$

$a \neq 0$ *два корня!*

$$\frac{a^{12} + 729^2}{729a^6} = \frac{a^6}{729} + \frac{729}{a^6} = \left(\frac{a}{3}\right)^6 + \left(\frac{3}{a}\right)^6 = (\sqrt{2}+1)^6 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^6 = (\sqrt{2}+1)^6 + (\sqrt{2}-1)^6 =$$

Знаменатель в числителе сократится, ведь когда и ± 1 будут в числителе, а знаменатель будет с противоположным знаком. Значит достаточно вычислить числитель $\sqrt{2}$ и удвоить ит.

$(\sqrt{2}+1)^6 = \sqrt{2}^6 + 6 \cdot \sqrt{2}^5 + 15 \sqrt{2}^4 + 20 \sqrt{2}^3 + 15 \sqrt{2}^2 + 6 \sqrt{2} + 1$

$$\text{Итого: } 2(\sqrt{2}^6 + 15 \sqrt{2}^4 + 15 \sqrt{2}^2 + 1) = 2(8 + 60 + 30 + 1) = 2(99) = 198$$

Ответ: 198.

✓ (4)



ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



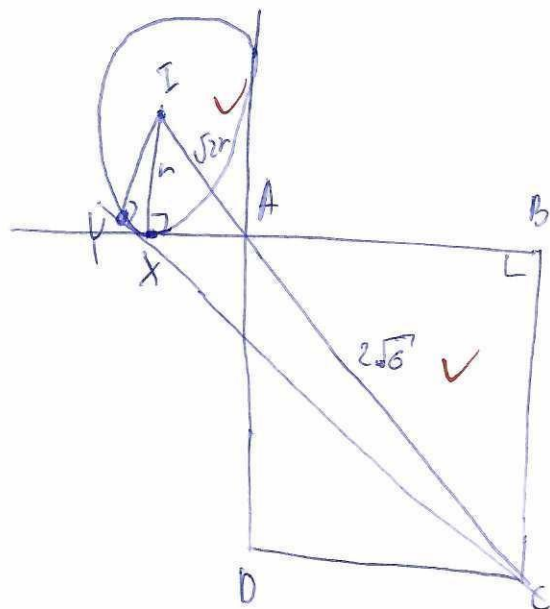
ШИФР

119912

0123456789

Бланк олимпиадной работы

N2



IX - точка касания окр-ты с прод. AB

IY - точка касания касат. и (1) с окр-той.

$$\angle IAX = 90^\circ; \angle IYC = 90^\circ$$

$IX = IY = r$ радиус окр-ты

$\angle IAX = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$ т.к. IX - высота в угол A.

$$IA = \sqrt{2}r \left(\frac{r}{\sin 45^\circ} = \frac{IA}{\sin 45^\circ} \right) \Rightarrow \boxed{IA = \sqrt{2}r}$$

Нам нужно показать, что I, A, C лежат на одной прямой
действительно, $\angle BAC = 45^\circ = \angle IAX$ ✓

из т. Пифагора для $\triangle ABC$: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{12 + 12} = 2\sqrt{6}$ см

также $\angle YCI = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ$, т.к. CY - кас., а CI - направление на центр окр-ты, к которой проведена касательная. Тогда по т. син в $\triangle YCI$: $\frac{YC}{\sin 90^\circ} = \frac{YI}{\sin 15^\circ} \Rightarrow \sqrt{2}r + 2\sqrt{6} = \frac{2\sqrt{2}r}{\sqrt{3}-1}$

$$r + 2\sqrt{3} = \frac{r(\sqrt{3}+1) \cdot 2}{2} \Rightarrow r \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot \sqrt{3} \Rightarrow r = 2 \text{ см}$$

Ответ: 2 см ✓ (10)

N3

Сложим все три уравнения: $x^2 - 40x + y^2 + 44y + z^2 - 46z + 1413 = 0$ ✓

можно представить 1413 как $400 + 484 + 529$. Тогда $x^2 - 40x + 400 + y^2 + 44y + 484 + z^2 - 46z + 529 = 0 = (x-20)^2 + (y+22)^2 + (z-23)^2 = 0$. Сумма квадратов равна 0 если все кв. равны 0

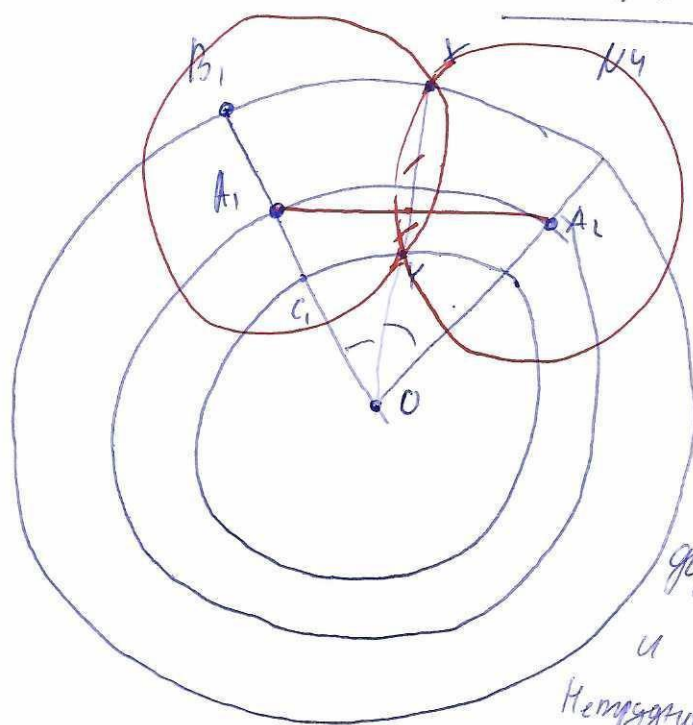
Бланк олимпиадной работы

Значит $x=20$; $y=-22$; $z=23$. ^{из (прод.)} Подставим эти числа и проверим равенства:

$$400 + 484 + 703 - 1587 = 0 \quad \checkmark$$

$$484 + 460 + 529 - 1473 = 0 \quad \checkmark$$

Третье можно не проверять, т.к. сумма равна 0 и два слагаемых = 0. Значит и третье тоже. Значит ~~то~~ ответ: $x=20$; $y=-22$; $z=23$ **15**



7 радаров будут расположены на окружности. На расстоянии L от центра. $A_1O = A_2O = L$. Они будут равноудалены. Радары будут расположены на той же окружности и будут видеть ее на 7 равных углов. Рассчитали центр, который они должны покрывать: это отмечено двумя окружностями, одна с центром в центре и на расстоянии L от центра с радаром. Нетрудно заметить, что самые удаленные от радаров

точки на окружности — это точки пересечения. Если угол между соседними радаром и окружностью (X и Y на рис.) Тогда выясним, на каком расстоянии L , что $A_1X = 41$ км и т.д. L , что $A_1Y = 41$ км. Тогда меньшее из них и будет ответ. На первый вопрос. $\angle A_1OX = \frac{360^\circ}{7} = \frac{160^\circ}{7}$ $\angle A_1X = 41 \Rightarrow A_1O = L$; $XO = L + y = 5$ км. $\cos \angle A_1OX: A_1X^2 = A_1O^2 + OX^2 - 2 \cdot A_1O \cdot OX \cdot \cos(\angle A_1OX)$ **уже с очевидностью**



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Бланк олимпиадной работы

подставим значения: $q_1^2 = L^2 + (L+g)^2 - 2 \cdot L \cdot (L+g) \cdot \cos(\frac{120^\circ}{2})$

//

$$L^2(2 - 2\cos(\frac{120^\circ}{2})) + L \cdot (18 - 18\cos(\frac{120^\circ}{2})) + 81 = q_1^2 \quad \text{] } 1 - \cos\frac{120^\circ}{2} = g$$

//

$$L^2 - 2a + L \cdot 18a - 40^2 = 0 \quad D = 324a^2 + 40^2 \cdot 8 = 324a^2 + 12800 = (18a)^2 + 2a \cdot 80^2$$

$$L = \frac{-18a + \sqrt{18a^2 + 2a \cdot 80^2}}{4a} = \frac{\sqrt{18a^2 + 2a \cdot 80^2}}{4a} = 4,5$$

Теперь найдем L в случае $A, V = 41 \text{ км}$: $A, V^2 = A, O^2 + O, V^2 - 2A, O \cdot O, V \cdot \cos(\frac{120^\circ}{2})$

$$q_1^2 = L^2 + (L+g)^2 - 2 \cdot L \cdot (L+g) \cos \frac{120^\circ}{2} \quad \text{] } a = 1 - \cos \frac{120^\circ}{2}$$

//

$$2L^2a - L(18a) + 81 = q_1^2 \quad D = 18a^2 + 80^2 \cdot 2a$$

//

$$L = \frac{18a + \sqrt{18a^2 + 80^2 \cdot 2a}}{4a} = \frac{\sqrt{18a^2 + 2a \cdot 80^2}}{4a} = 4,5$$

Значит расстояние до внешнего круга больше, чем до внутреннего. Значит

$$L = \frac{\sqrt{18(1 - \cos \frac{120^\circ}{2})^2 + 2(1 - \cos \frac{120^\circ}{2})1600}}{4(1 - \cos \frac{120^\circ}{2})} = 4,5$$

Бланк олимпиадной работы

14 (всего)

Ответом на вторую часть будет разность площадей внешн. и внутр. окр-б:
 $(L+g)^2 \pi - (L-g)^2 \pi = 36\pi \cdot L = 36\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{18(1-\cos(\frac{120^\circ}{2}))^2 + 3200(1-\cos(\frac{120^\circ}{2}))}}{4(1-\cos(\frac{120^\circ}{2}))} - 4,5 \right)$

N5

$$(k^2 - 2k + 35)x^2 + (3k - 9)x + 2 = 0$$

$$D = 9k^2 - 54k + 81 - 8k^2 + 16k + 280 = k^2 - 38k + 19^2 = (k - 19)^2$$

$$x_{1,2} = \frac{9 - 3k \pm \sqrt{(k - 19)^2}}{2k^2 - 4k + 70}$$

$$\Rightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{9 - 3k - k + 19}{9 - 3k + k - 19} = \frac{28 - 4k}{-2k - 10}$$

Интересно, когда $\frac{x_1}{x_2} \geq 2$ и $\frac{x_1}{x_2} \leq \frac{1}{2}$:

I $\frac{28 - 4k}{-2k - 10} \geq 2 \Leftrightarrow 28 - 4k \leq -4k - 20 \Leftrightarrow 48 \leq 0 \leftarrow \text{никогда.}$
 т.к. $k \geq 0, 10 - 2k - 10 < 0$

II $\frac{28 - 4k}{-2k - 10} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 28 - 4k \geq -k - 5 \Leftrightarrow 33 \geq 3k \Leftrightarrow k \leq 11$

Или учитывая $k \leq 11 \Rightarrow [8; 11]$ и $(8; 13]$

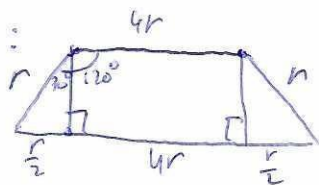
то есть $\frac{3}{5} \Rightarrow \text{вероятность } 0,6.$

Ответ: 0,6

Бланк олимпиадной работы
16

Заметим, что центры шаров расположены в трёх параллельных плоскостях, в первой плоскости их просто один центр: $\bullet$; во второй плоскости их 3 центра: $\bullet \bullet \bullet$, в третьей плоскости их 6 центров $\bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet$, причем расстояние между центрами, которые являются соседними равно $2r$, т.к. шары касаются, где r - радиус шара.

Итого получается правильный тетраэдр со стороной $4r$, образованный центрами шар. Зная это можно найти и сторону тетраэдра, образованного центрами сфер:



Получается, что сторона будет 5r.

Радиус описанной сферы, правильного тетраэдра равен $\frac{3}{4}$ его высоты.

Вычислим высоту:

Нарисуем вправ. Δ со сторонами $5r$ PR и h $5r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{3}{4}$ ~~высота~~

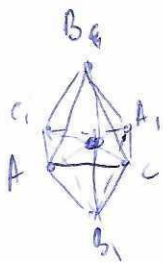
$$\frac{5r\sqrt{3}}{3} \Rightarrow h = \sqrt{25r^2 - \frac{25}{3}r^2} = \frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{3}}r$$

$$\frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{3}}r = \sqrt{6} \cdot 12 \Rightarrow r = \frac{\sqrt{6} \cdot 12 \cdot \sqrt{3}}{5\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{6}}{5}$$

$$\begin{aligned} \parallel \\ \sqrt{6} + 1 &= \frac{5\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{5\sqrt{2}}{4}r \\ \parallel \\ r &= \frac{\sqrt{6} + 1}{5\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{5} \end{aligned}$$

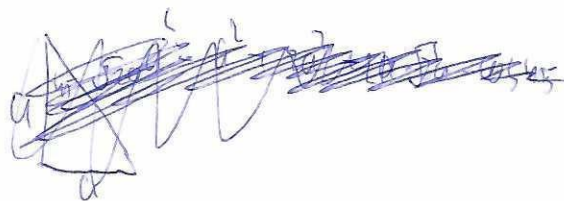
Бланк олимпиадной работы

Рассмотри центры 6-ти шаров, которых касаются интересующей нас шаром.



Это две правильных треугольника в параллельных плоскостях равноудаленной от них, а по совмещению центров интересующей нас сферы является пересечением AA_1, BB_1, CC_1 .

$\angle BAB_1 = 120^\circ \Rightarrow BB_1 = \sqrt{(2r)^2 + (2r)^2 - 2(2r)(2r)\cos 120^\circ} = 3(2r)^2 \Rightarrow BB_1 = 2r \cdot \sqrt{3}$



расстояние от B до центра сферы $= 2r\sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Радиус сферы $= r\sqrt{3} - r = r(\sqrt{3} - 1) = \frac{4\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{5}(\sqrt{3} - 1) = \frac{12 + 2\sqrt{6} - 4\sqrt{3} - 2\sqrt{2}}{5}$

?

2