



ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР

1 1 8 6 6 1

1 1 2 2 4 5 6 7 8 9

Бланк олимпиадной работы

Класс 11 "А" Вариант 21 Дата Олимпиады 12.02.2023

Площадка написания МТТИУ г. Москва

ОЦЕНКА

(заполняется проверяющим)

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	10	15	-	20	-					50	пятьдесят	

Задача 1.

$$\frac{a^{12} + 729^2}{729a^6} = \frac{a^{12}}{729a^6} + \frac{729^2}{729a^6} = \frac{a^6}{729} + \frac{729}{a^6} = \left(\frac{a}{3}\right)^6 + \left(\frac{3}{a}\right)^6 =$$

$$= \left(\left(\frac{a}{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{a}\right)^2\right) \left(\left(\frac{a}{3}\right)^4 - \frac{a^2 \cdot 3^2}{3^2 \cdot a^2} + \left(\frac{3}{a}\right)^4\right) = \left(\left(\frac{a}{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{a}\right)^2\right) \left(\left(\frac{a}{3}\right)^4 + \left(\frac{3}{a}\right)^4 - 1\right)$$

$$\frac{a}{3} - \frac{3}{a} = 2$$

Возведем в квадрат обе части равенства:

$$\left(\frac{a}{3} - \frac{3}{a}\right)^2 = 4$$

$$\left(\frac{a}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{a}{3}\right) \cdot \left(\frac{3}{a}\right) + \left(\frac{3}{a}\right)^2 = 4$$

$$\left(\frac{a}{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{a}\right)^2 = 6$$

Вновь возведем в квадрат обе части равенства:

$$\left(\frac{a}{3}\right)^4 + 2\left(\frac{a}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{a}\right)^2 + \left(\frac{3}{a}\right)^4 = 36$$

$$\left(\frac{a}{3}\right)^4 + \left(\frac{3}{a}\right)^4 = 32$$

Из преобразованного ранее выражения получаем:

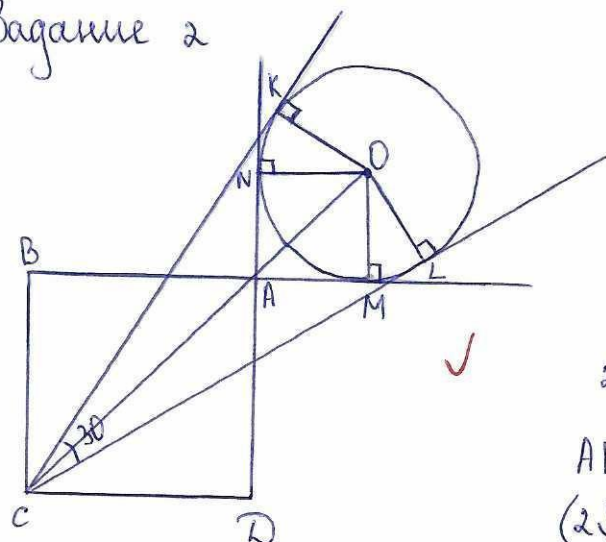
$$\left(\left(\frac{a}{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{a}\right)^2\right) \left(\left(\frac{a}{3}\right)^4 + \left(\frac{3}{a}\right)^4 - 1\right) = 6 \cdot (32 - 1) = 6 \cdot 31 = 186$$

Ответ: ~~5778~~ 198 ✓

(5)

Бланк олимпиадной работы

Задание 2



1) $OK = ON = OM = OL = R$ (радиусы окружности)

$$OK \perp CK$$

$$OL \perp CL$$

$$ON \perp DA$$

$$OM \perp AB$$

радиусы, проведенные в точку касания

2) Рассмотрим ~~квадрат~~ $\triangle ABC$:

$$AB^2 + BC^2 = AC^2 \text{ (по теореме Пифагора)}$$

$$(2\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3})^2 = AC^2$$

$$AC = \sqrt{2 \cdot (2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{6}$$

3) Рассмотрим $ONAM$:

$$ON \perp AN$$

$$OM \perp AM$$

$$AN \perp AM (\angle NAM = \angle BAD \text{ как вертикальные})$$

$$ON = OM$$

$\Rightarrow ONAM$ - квадрат

$$\Rightarrow ON = AN = AM = OM = R$$

4) Рассмотрим $\triangle OMA$:

$$OA^2 = AM^2 + OM^2 \text{ (по теореме Пифагора)}$$

$$OA = \sqrt{R^2 + R^2} = \sqrt{2R^2} = R\sqrt{2}$$

5) Рассмотрим $\triangle CKO$ и $\triangle OLC$:

$$CK = CL \text{ (как отрезки касательных)}$$

$$OK = OL \text{ (как радиусы окружности)}$$

OC - общая сторона

$\Rightarrow \triangle CKO = \triangle OLC$ (по 3-м сторонам)

$$\Rightarrow \angle OCK = \angle OCL = \frac{\angle KCL}{2} = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ$$

6) Рассмотрим $\triangle CLO$:

$\triangle CLO$ - прямоугольный ($OL \perp CL$)

$$CO = CA + AO = 2\sqrt{6} + R\sqrt{2}$$

$$\sin \angle OCL = \frac{OL}{OC} \Rightarrow OL = OC \cdot \sin \angle OCL \Rightarrow R = OC \cdot \sin 15^\circ$$

Бланк олимпиадной работы

$$R = (2\sqrt{6} + R\sqrt{2}) \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} \right)$$

$$R = (2\sqrt{6} + R\sqrt{2}) \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \right) \quad | \cdot 4$$

$$4R = (2\sqrt{6} + R\sqrt{2})(\sqrt{6} - \sqrt{2})$$

$$4R = 12 - 2 \cdot 2\sqrt{3} + 2R\sqrt{3} - 2R$$

$$6R - 2R\sqrt{3} = 12 - 4\sqrt{3} \quad | : 2$$

$$3R - R\sqrt{3} = 6 - 2\sqrt{3}$$

$$R(3 - \sqrt{3}) = 6 - 2\sqrt{3}$$

$$R = \frac{2(3 - \sqrt{3})}{3 - \sqrt{3}} = 2 \text{ см}$$

Ответ: 2 см ✓ ~~(10)~~

Задача 5

$$k \in [8; 13]$$

$$(k^2 - 2k - 35)x^2 + (3k - 9)x + 2 = 0$$

$$k^2 - 2k - 35 \neq 0$$

$$D = 4 + 140 = 144$$

$$k_1 = \frac{2+12}{2} = 7 \notin [8; 13] \quad \checkmark$$

$$k_2 = \frac{2-12}{2} = -5 \notin [8; 13]$$

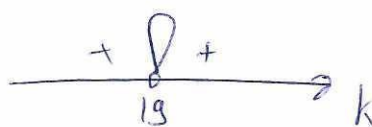
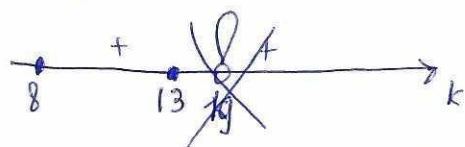
При $k_1 = 7$ и $k_2 = -5$ уравнение превращается в линейное, а, значит, не может иметь 2 корня, но $k \in [8; 13] \Rightarrow$ при любых k из заданного промежутка данное уравнение может иметь 2 корня

$$D = (3k - 9)^2 + 2 \cdot (k^2 - 2k - 35) = 9k^2 - 54k + 81 - 2k^2 + 4k - 70 = k^2 - 38k + 361 = (k - 19)^2$$

Чтобы квадратное уравнение имело 2 корня, $D > 0$

Бланк олимпиадной работы

$$\begin{aligned}(k-19)^2 &> 0 \\ (k-19)^2 &= 0 \\ k-19 &= 0 \\ k &= 19\end{aligned}$$



$\Rightarrow D > 0$ при всех $k \neq 19$, но $k \in [8; 13] \Rightarrow$ уравнение имеет 2 корня при всех k из заданного промежутка

$$x_1 = \frac{-(3k-9) + \sqrt{(k-19)^2}}{2 \cdot (k^2-2k-35)} = \frac{-3k+9+k-19}{2(k^2-2k-35)} = \frac{-2k-10}{2(k^2-2k-35)}$$

$$x_2 = \frac{-(3k-9) - \sqrt{(k-19)^2}}{2(k^2-2k-35)} = \frac{-3k+9-k+19}{2(k^2-2k-35)} = \frac{-4k+28}{2(k^2-2k-35)}$$

Найдем значения k , при которых выполняется условие $x_1 \leq 2x_2$

$$\frac{-2k-10}{2(k^2-2k-35)} \leq \frac{2 \cdot (-4k+28)}{2(k^2-2k-35)}$$

$$\frac{-2k-10+8k-56}{2(k^2-2k-35)} \leq 0$$

$$\frac{6k-66}{2(k^2-2k-35)} \leq 0$$

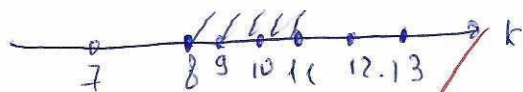
$$2(k^2-2k-35) \neq 0$$

$$k \neq 7; k \neq -5$$

$$6k-66=0$$

$$6k=66$$

$$k=11$$



$\Rightarrow$ при $k \in [8; 11]$ выполняется данное условие

Бланк олимпиадной работы

Тогда вероятность, что корни данного уравнения удовлетворяют условию $x_1 \leq 2x_2$, равна вероятности, что $k \in [8; 11]$:

$$\frac{3}{5} = 0,6$$

Ответ: 0,6 ✓ (20)

Задача 3

$$\begin{cases} x^2 - 22y - 69z + 703 = 0 \\ y^2 + 23x + 23z - 1473 = 0 \\ z^2 - 63x + 66y + 2183 = 0 \end{cases}$$

Сложим все три уравнения. ✓

$$x^2 - 22y - 69z + 703 + y^2 + 23x + 23z - 1473 + z^2 - 63x + 66y + 2183 = 0$$

$$x^2 - 40x + y^2 + 44y + z^2 - 46z + 1413 = 0$$

$$x^2 - 2 \cdot 20x + 400 + y^2 + 2 \cdot 22y + 484 + z^2 - 2 \cdot 23 + 529 = 0$$

$$(x-20)^2 + (y+22)^2 + (z-23)^2 = 0 \quad \checkmark$$

Квадраты не могут быть отрицательными $\Rightarrow$ чтобы их сумма равнялась нулю, каждый из них должен равняться нулю:

$$\begin{cases} (x-20)^2 = 0 \\ (y+22)^2 = 0 \\ (z-23)^2 = 0 \end{cases} \begin{cases} x-20=0 \\ y+22=0 \\ z-23=0 \end{cases} \begin{cases} x=20 \\ y=-22 \\ z=23 \end{cases}$$

Ответ: $x=20$ ✓ ; $y=-22$ ✓ ; $z=23$ ✓

(15)