



ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ШИФР

1 0 8 3 0 4

1 1 2 3 4 5 6 7 8 9

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Доп. задание:

Бланк олимпиадной работы

+1.

+1.

Класс 11 № Вариант 21 Дата Олимпиады 12.02.2023

Площадка написания МГТУ, г. Москва

ОЦЕНКА

(заполняется проверяющим)

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	10	15	—	17	—					47	сорок семь	<i>Александр</i>

$$\textcircled{1} \quad \frac{a^{12} + 729^2}{729a^6} = \frac{a^6}{729} + \frac{729}{a^6} = \frac{(a^2)^3}{(3^3)^3} + \frac{(3^2)^3}{(a^2)^3} =$$

$$\frac{a^{14}}{3} - \frac{a^{13}}{a} = 2 \mid \cdot 3a, a \neq 0 \quad \text{При } a = 3(1+\sqrt{2})$$

$$a^2 - 9 = 6a$$

$$a^2 - 6a - 9 = 0$$

$$D = 36 + 4 \cdot 9 = 42$$

$$a_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{42}}{2}$$

$$a_{1,2} = 3 \pm \sqrt{12}$$

$$a_{1,2} = 3(1 \pm \sqrt{2})$$

$$= \frac{(3^2(1+\sqrt{2})^2)^3}{3^6} + \frac{3^6}{(3^2(1+\sqrt{2})^2)^3} =$$

$$= \frac{((1+\sqrt{2})^2)^3}{1} + \frac{1}{((1+\sqrt{2})^2)^3} =$$

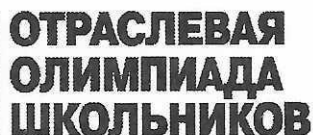
$$= (1+2\sqrt{2}+2)^3 + \frac{1}{(1+2\sqrt{2}+2)^3} =$$

$$= 3^3 + 3^3 \cdot 2\sqrt{2} + 3^3 \cdot 4 + 2^3 \cdot (\sqrt{2})^3 + \frac{1}{(3+2\sqrt{2})^3} =$$

$$= 99 + 40\sqrt{2} + \frac{1}{99+40\sqrt{2}} = \frac{(99+40\sqrt{2})^2 + 1}{99+40\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{9801 + 2 \cdot 6930\sqrt{2} + 4900 \cdot 2 + 1}{99+40\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot 99(99+40\sqrt{2})}{(99+40\sqrt{2})} = 198$$

Лист 1 из 6



Бланк олимпиадной работы

При $\alpha = 3(1-\sqrt{2})$

$$\frac{3^6 \cdot ((1-\sqrt{2})^2)^3}{3^6} + \frac{3^6}{((1-\sqrt{2})^2)^3 \cdot 3^6} = (3-2\sqrt{2})^3 + \frac{1}{(3-2\sqrt{2})^3} =$$

$$= 27 - 54\sqrt{2} + 72 - \cancel{288} 16\sqrt{2} + \frac{1}{(3-2\sqrt{2})^3} = 99 - 70\sqrt{2} + \frac{1}{99-70\sqrt{2}} =$$

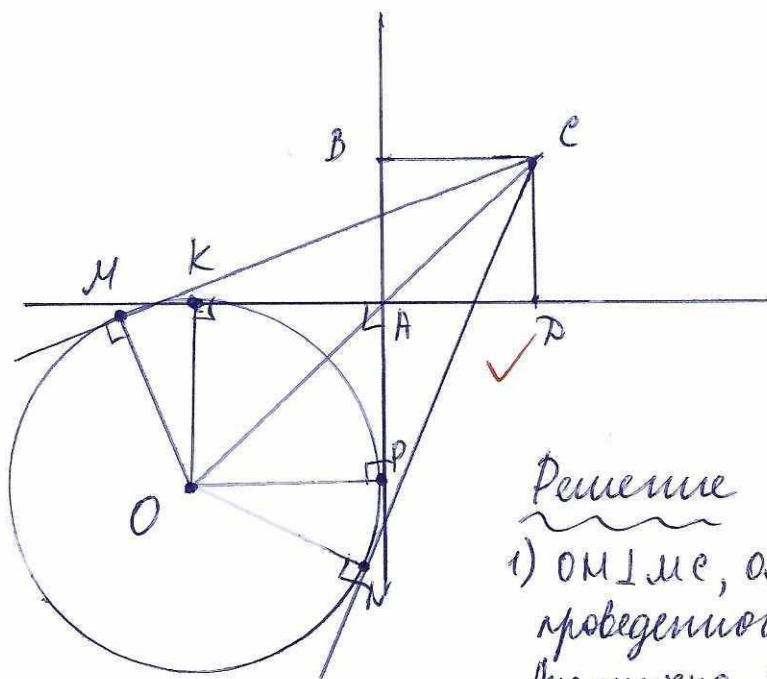
$$= \frac{(99-70\sqrt{2})^2+1}{99-70\sqrt{2}} = \frac{99^2-2\cdot 99\cdot 70\sqrt{2}+4900\cancel{2}\cdot 2+1}{99-70\sqrt{2}} = \frac{2\cdot 99^2-2\cdot 99\cdot 70\sqrt{2}}{99-70\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{2.99(99-70\sqrt{2})}{(99-70\sqrt{2})} = 498. \quad \checkmark$$

Amber: 198. ✓

⑤

②



Дано: $\square ABCD$

$$AB = BC = CD = AD = 2\sqrt{3}$$

$$EMP(o, R) = M$$

$$eN \cap (0, R) = N$$

$$(0; R) \cap AB = K$$

$$(O; R) \cap AD = P \quad \angle MEN = 30^\circ$$

Haftma: R - ?

Решение

1) $OM \perp ME$, $OM = R$ - по св-ву радиуса проведенного в точку касания
Аналогично $OK \perp AD$, $OK = R$; $OP = R$, $OP \perp AB$;
 $ON \perp CN$, $ON = R$

Бланк олимпиадной работы

2) $\angle BAC = 90^\circ$ (по уш)
 $\angle BAC = \angle KAP = 90^\circ$ (как вертикальные углы)

3) Рассмотрим $\triangle OKAP$: $\angle K = \angle P = 90^\circ$
 $\angle KAP = 90^\circ$ $\Rightarrow \triangle OKAP$ квадрат (по признаку) $\Rightarrow$
 $OK = OP$

$\Rightarrow OA = OK\sqrt{2} = R\sqrt{2}$ - как диагональ квадрата

4) $\angle BAC = 45^\circ$ (диагональ $\triangle ABC$ AC - бис-са угла)
 $\angle OAP = 45^\circ$ (диагональ $\triangle OKAP$ OA - бис-са угла) $\Rightarrow A \in OC$
 $B, A, P \in AB$
 $O, C \in OC$
 $O, A \in AO$

5) $\triangle OMC$: $\angle M = 90^\circ$ (п.1) $\Rightarrow OM = OC \sin \angle MCO$
 $R = OC \sin \angle MCO$

6) $OC = OA + AC = R\sqrt{2} + AB\sqrt{2} = \sqrt{2} (R + AB) = \sqrt{2} (R + 2\sqrt{3})$

7) OC - бис-са угла $\angle MCN \Rightarrow \angle MCO = \frac{\angle MCN}{2} = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ$

8) из п.5-7 $\Rightarrow R = \sqrt{2} (R + 2\sqrt{3}) \cdot \sin 15^\circ$

$R = \sqrt{2} (R + 2\sqrt{3}) \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

$2R = R(\sqrt{3}-1) + 2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)$

$R(2-\sqrt{3}+1) = 6-2\sqrt{3}$

$R = \frac{2(3-\sqrt{3})}{3-\sqrt{3}} = 2$

Ответ: $R=2$, $\checkmark$

(1ф)



Бланк олимпиадной работы

$$\textcircled{3} \begin{cases} x^2 - 22y - 69z + 703 = 0 \\ y^2 + 23x + 23z - 1473 = 0 \\ z^2 - 63x + 66y + 2183 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 22y - 69z + 703 = 0 \\ 3y^2 + 69x + 69z - 1473 \cdot 3 = 0 \textcircled{+} \\ z^2 - 63x + 66y + 2183 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 22y - 69z + 703 = 0 \quad | \cdot 3 \\ x^2 + 3y^2 - 22y + 69x + 703 - 1473 \cdot 3 = 0 \\ z^2 - 63x + 66y + 2183 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 66y - 207z + 703 \cdot 3 = 0 \textcircled{+} \\ 3y^2 + x^2 - 22y + 69x + 703 - 1473 \cdot 3 = 0 \\ z^2 - 63x + 66y + 2183 = 0 \leftarrow \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2 + z^2 - 207z + 63x + 2183 + 703 \cdot 3 = 0 \\ 3y^2 + x^2 - 22y + 69x + 703 - 1473 \cdot 3 = 0 \\ x^2 - 22y - 69z + 703 = 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} x^2 - 22y - 69z + 703 = 0 \\ y^2 + 23x + 23z - 1473 = 0 \\ z^2 - 63x + 66y + 2183 = 0 \end{cases}$$

Сложим уравнения:

$$x^2 - 40x + y^2 + 44y + z^2 - 46z + 1413 = 0$$

$$x^2 - 40x + y^2 + 44y + z^2 - 46z + 1413 = 0$$

$$x^2 - 40x + 400 + y^2 + 44y + 484 + z^2 - 46z + 529 = 0 \quad \checkmark$$

$$(x - 20)^2 + (y + 22)^2 + (z - 23)^2 = 0$$

Сумма квадратов равна 0, если каждое слагаемое равно 0

$$\begin{cases} x - 20 = 0 \\ y + 22 = 0 \\ z - 23 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 20 \\ y = -22 \\ z = 23 \end{cases} \quad \checkmark$$

Ответ: (20; -22; 23).

(15)



Бланк олимпиадной работы

⑤ $(k^2 - 2k - 35)x^2 + (3k - 9)x + 2 = 0$, $k \in [8; 13]$ $x_1 \leq 2x_2$

1) $k^2 - 2k - 35 = 0$, при этом условии ур-ние ~~будет иметь 1 корень~~
не будет квадратным

$$D = 4 + 4 \cdot 35 = 144$$

$$k = \frac{2 \pm 12}{2}$$

$k = \begin{bmatrix} 7 \\ -5 \end{bmatrix} \notin [8; 13]$ $\rightarrow$ при любых значениях $k \in [8; 13]$ ур-ние квадратное

2) $D = (3k - 9)^2 - 4 \cdot 2(k^2 - 2k - 35) = 9k^2 - 54k + 81 - 8k^2 + 16k + 280 = k^2 - 38k + 361 = (k - 19)^2 > 0$, при $k \in [8; 13]$ $\Rightarrow$

~~7.к. должно быть 2 корня~~ $\Rightarrow$ ур-ние имеет 2 разл. корня

$$x_1 = \frac{3(k-3) + k - 19}{2(k-7)(k+5)} = \frac{4k - 28}{2(k-7)(k+5)}$$

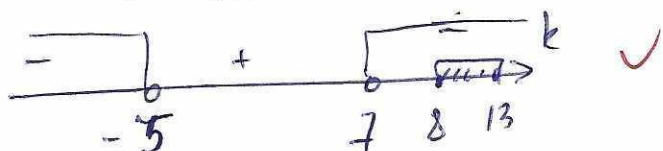
$$x_2 = \frac{3k - 9 + k + 19}{2(k-7)(k+5)} = \frac{2k + 10}{2(k-7)(k+5)}$$

Подставим в неравенство $x_1 \leq 2x_2$

$$\frac{4k - 28}{2(k-7)(k+5)} \leq \frac{2 \cdot (2k + 10)}{2(k-7)(k+5)}$$

$$\frac{2k - 14}{(k-7)(k+5)} - \frac{2k + 10}{(k-7)(k+5)} \leq 0$$

$$\frac{-24}{(k-7)(k+5)} \leq 0$$



~~Выражение~~ Условие выполняется при любом $k \in [8; 13]$

$$P_1 = 1$$

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Бланк олимпиадной работы

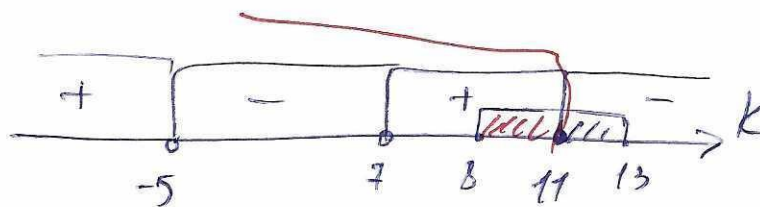
Если $x_1 = \frac{2k+10}{2(k-7)(k+5)}$, а $x_2 = \frac{4k-28}{2(k+5)(k-7)}$

Тогда

$$\frac{2k+10}{2(k-7)(k+5)} \leq \frac{4k-28}{2(k-7)(k+5)}$$

$$\frac{k+5 - 4k+28}{(k-7)(k+5)} \leq 0$$

$$\frac{3(11-k)}{(k-7)(k+5)} \leq 0$$



$x_1 \leq 2x_2$ выполняется при $k \in [11; 13]$

$$p_2 = \frac{11-8}{13-8} = \frac{3}{5} = 0,6$$

17