ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ГАЗПРОМ

ШИФР 116043

Бланк олимпиадной работы

Класс 10 Вариант 21 Дата Олимпиады 12.02.23

Площадка написания МГТУ им. Н.Баумана

ОЦЕНКА

(заполняется проверяющим)

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	4	10	15	–	20	–					49	сорок девять	

Бланк олимпиадной работы

№5

$k\in[8;13]$

$(k^2-2k-35)x^2+(3k-9)x+2=0$

$D=(3k-9)^2-4\cdot2\cdot(k^2-2k-35)=9k^2-54k+81-8k^2+16k+280=$
$=k^2-38k+361=(k-19)^2$

Тогда

$x_1=\dfrac{-(3k-9)+\sqrt{(k-19)^2}}{2(k^2-2k-35)}$; $x_2=\dfrac{-(3k-9)-\sqrt{(k-19)^2}}{2(k^2-2k-35)}$

С учетом, что $k\in[8;13]$ и $\Rightarrow k-19<0$, имеем:

$x_1=\dfrac{-3k+9-k+19}{2(k^2-2k-35)}$ $x_2=\dfrac{-3k+9+k-19}{2(k^2-2k-35)}$

Разложим $k^2-2k-35$ на множители, получим

$x_1=\dfrac{-4k+28}{2(k-7)(k+5)}=\dfrac{-4(k-7)}{2(k-7)(k+5)}=\dfrac{-2}{k+5}$ $x_2=\dfrac{-2k-10}{2(k-7)(k+5)}=\dfrac{-2(k+5)}{2(k-7)(k+5)}=$
$=\dfrac{-1}{k-7}$

Найдем вероятность, что $x_1\le 2x_2$ (стоит отметить, что непонятно какой из корней x_1 и x_2)

1) Если $x_1=\dfrac{-2}{k+5}$
$x_2=\dfrac{-1}{k-7}$ то

$\dfrac{-2}{k+5}\le\dfrac{-2}{k-7}\Rightarrow\dfrac{1}{k+5}\ge\dfrac{1}{k-7}$

$k+5\le k-7$
реш. нет.

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

ШИФР 116043

Бланк олимпиадной работы

2) Если

$x_2 = \frac{-2}{k+5}$

$x_1 = \frac{-1}{k-7}$ тогда

$\frac{-1}{k-7} \le \frac{-4}{k+5}$

$\frac{1}{k-7} \ge \frac{4}{k+5}$

$k+5 \ge 4k-28$

$3k \le 33$

$k \le 11$

20

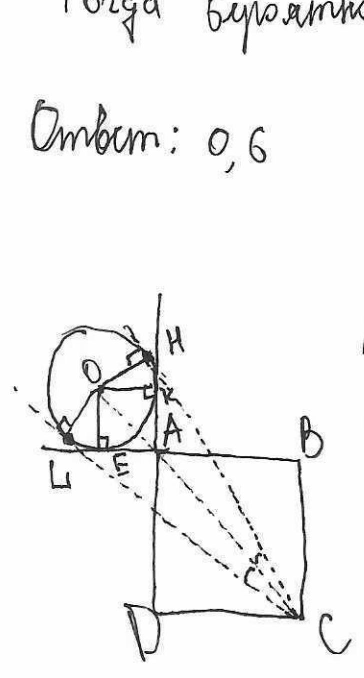
Тогда имеем, что $k \in [8;11]$ - условие выполняется,

а при $k \in (11;13]$ - условие не выполняется

Тогда вероятность удачного исхода: $\frac{11-8}{13-8} = \frac{3}{5} = 0,6$

Ответ: 0,6

N2



ABCD - квадрат

$AB = 2\sqrt{3}$ см

$\angle HCL = 30°$

Найти r-?

Пусть r - радиус окружности, тогда заметим, что CO - бис. $\angle HCL$ по св-ву отрезков кас., но также CO - бис. $\angle BCD$ и $\Rightarrow$ CO содержит в себе диагональ квадрата.

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

ШИФР 116043

0123456789

Бланк олимпиадной работы

$OEAK$ - квадрат, т.к. $OK \perp AD$; $OE \perp AB$ т.к. радиусы и $\angle EAK = 90°$ т.к. верт $\angle DAB = 90°$ (т.к. квадрат)

Тогда $OA = \sqrt{2}r$ (по теореме Пифагора для р/б; п/у тр-ка OKA.)

AC - диагональ квадрата, тогда $AC = 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2} = 2\sqrt{6}$ (по теореме Пифагора для п/у; р/б; тр-ка ABC)

Тогда $OC = OA + AC = \sqrt{2}r + 2\sqrt{6}$

Рассмотрим $\triangle OCH$ - п/у; $OH \perp HC$ т.к OH - рад. а CH - кас:

Тогда $\cancel{\sin 15}$ $\sin\angle OCH = \dfrac{OH}{OC}$; но OC - бис. $\angle LCH \Rightarrow \angle OCH = 15°$

$OH = r$; $OC = \sqrt{2}r + 2\sqrt{6}$

$\sin 15° = \dfrac{r}{r\sqrt{2} + 2\sqrt{6}}$, из условия $\sin 15° = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$, тогда

$$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{r}{r\sqrt{2}+2\sqrt{6}} \Rightarrow 2\sqrt{2}r = (\sqrt{3}-1)\sqrt{2}(r+2\sqrt{3})$$

$$2r = (\sqrt{3}-1)(r+2\sqrt{3})$$

$$2r = \sqrt{3}r - r + 6 - 2\sqrt{3}$$

$$3r - \sqrt{3}r = 6 - 2\sqrt{3}$$

$$r(3-\sqrt{3}) = 2(3-\sqrt{3})$$

$$r = 2$$

10

Ответ: $r = 2$

Бланк олимпиадной работы

№1

$$\frac{a^{12}+729^2}{729a^6} - ?\qquad \text{если } \frac{a}{3}-\frac{3}{a}=2$$

$$\frac{a^{12}}{729a^6}+\frac{729^2}{729a^6}=\frac{a^6}{729}+\frac{729}{a^6}=\left(\frac{a}{3}\right)^6+\left(\frac{3}{a}\right)^6$$

Выделим полный квадрат разности:

$$\left(\left(\frac{a}{3}\right)^3-\left(\frac{3}{a}\right)^3\right)^2+2=\left(\left(\frac{a}{3}-\frac{3}{a}\right)\left(\left(\frac{a}{3}\right)^2+1+\left(\frac{3}{a}\right)^2\right)\right)^2+2=\left(2\left(\left(\frac{a}{3}\right)^2+\left(\frac{3}{a}\right)^2+1\right)\right)^2+2$$

+

\# Все сводится к тому, чтобы найти $\left(\frac{a}{3}\right)^2+\left(\frac{3}{a}\right)^2$

Рассмотрим выражение $\frac{a}{3}-\frac{3}{a}=2$, возведем обе части в квадрат.

$$\left(\frac{a}{3}\right)^2-2+\left(\frac{3}{a}\right)^2=4 \Rightarrow \left(\frac{a}{3}\right)^2+\left(\frac{3}{a}\right)^2=6$$, тогда

$$\left(2\left(\left(\frac{a}{3}\right)^2+\left(\frac{3}{a}\right)^2+1\right)^2\right)+2=\left(2(6+1)^2\right)+2=98+2=100$$

4

Ответ: 100

№3

$$\begin{cases} x^2-22y-69z+703=0\\ y^2+23x+23z-1473=0\\ z^2-63x+66y+2183=0 \end{cases}$$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

ШИФР 116043

0123456789

Бланк олимпиадной работы

Сложим все три уравнения; получим:

$$x^2+y^2+z^2-40x+44y-46z+1413=0$$

Выделим полные квадраты:

$$(x^2-40x+400)-400+(y^2+44y+484)-484+(z^2-46z+529)-529+1413=0$$

$$(x-20)^2+(y+22)^2+(z-23)^2+1413-884-529=0$$

$$\underbrace{(x-20)^2}_{\geq 0}+\underbrace{(y+22)^2}_{\geq 0}+\underbrace{(z-23)^2}_{\geq 0}+\cancel{10}\,0=0$$

Квадрат любого выражения ≥ 0 значит сумма таких выражений:

$$(x-20)^2+(y+22)^2+(z-23)^2\geq 0 \quad \cancel{|+10}$$

$$\cancel{(x-20)^2+(y+22)^2+(z-23)^2+10\geq 10}$$

Значит $x=20$, $y=-22$, $z=23$

$\Rightarrow$ у ~~уравнения~~

у ~~уравнения нет решений~~

$\Downarrow$

у ~~системы нет решений~~

Ответ: у ~~системы нет решений~~ $x=20$, $y=-22$, $z=23$

15 +