



ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР

102470

0123456789

Бланк олимпиадной работы

Класс 11 Вариант 21 Дата Олимпиады 12.02.2023

Площадка написания МГТУ имени Баумана

ОЦЕНКА

(заполняется проверяющим)

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	10	15	8	20	—					58	пятьдесят восемь	<i>Ла</i>

$$\frac{a^{12} + 729^2}{729a^6} = \frac{a^6}{729} + \frac{729}{a^6} \stackrel{N1}{=} \frac{a^6}{3^6} + \frac{3^6}{a^6} = \left(\frac{a^2}{3^2}\right)^3 + \left(\frac{3^2}{a^2}\right)^3 = \left(\frac{a^2}{3^2} + \frac{3^2}{a^2}\right) \left(\frac{a^4}{3^4} + \frac{3^4}{a^4} - \frac{a^2}{3^2} \cdot \frac{3^2}{a^2}\right) = \left(\frac{a^2}{3^2} + \frac{3^2}{a^2}\right) \left(\frac{a^4}{3^4} + \frac{3^4}{a^4} - 1\right) \quad (=)$$

$$* \frac{a}{3} - \frac{3}{a} = 2 \Rightarrow \frac{a^2}{3^2} - 2 \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{3}{a} + \frac{3^2}{a^2} = 4 \Rightarrow \frac{a^2}{3^2} + \frac{3^2}{a^2} = 6 \quad \checkmark$$

$$* \frac{a^2}{3^2} + \frac{3^2}{a^2} = 6 \Rightarrow \frac{a^4}{3^4} + \frac{3^4}{a^4} + 2 \cdot \frac{a^4}{3^4} \cdot \frac{3^4}{a^4} = 36 \Rightarrow \frac{a^4}{3^4} + \frac{3^4}{a^4} = 34 \quad \checkmark$$

$$\quad (=) \quad 6 \cdot (34 - 1) = 6 \cdot 33 = 198$$

Ответ: 198 $\checkmark$

(5)

Бланк олимпиадной работы

№3

$$\begin{cases} x^2 - 22y - 63z + 703 = 0 \\ y^2 + 23x + 23z - 1473 = 0 \\ z^2 - 63x + 66y + 2183 = 0 \end{cases}$$

1) Сложим все уравнения:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 40x + 44y - 46z + 1413 = 0 \quad \checkmark$$

2) $x^2 - 40x + 400 + y^2 + 44y + 484 + z^2 - 46z + 529 + 1413 - 400 - 484 - 529 = 0$

3) $(x-20)^2 + (y+22)^2 + (z-23)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=20 \\ y=-22 \\ z=23 \end{cases} \quad \checkmark$

Ответ: $(20; -22; 23)$ $\checkmark \checkmark \checkmark$

15

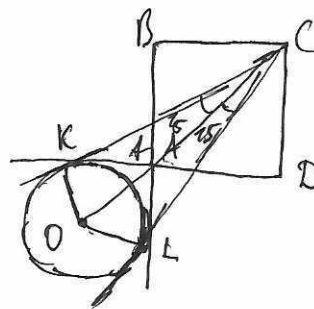
№2

$$KO = R - (\text{проекция})$$

$$\Delta OKC: \sin \angle KCO = \sin 15^\circ =$$

$$= \frac{KO}{OC} = \frac{R}{2\sqrt{3}\sqrt{2} + R\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$\parallel$
 $\{CA + OA\}$
 $\parallel$
 $AO\sqrt{2} \quad R\sqrt{2}$



$$\Rightarrow \frac{R}{2\sqrt{3}+R} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \Rightarrow 2R = 6 - 2\sqrt{3} + \sqrt{3}R - R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3-\sqrt{3})R = 6 - 2\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$R = 2$$

Ответ: $R = 2$ $\checkmark$

10

Бланк олимпиадной работы

$x \in [8; 13]$

N5

$(k^2 - 2k - 35)x^2 + (3k - 9)x + 2 = 0 \quad (1)$

Найдем, при каких значениях k , корни ур-ня (1) удовлетворяют условию $x_1 \leq x_2$

П. Виета:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{9-3k}{k^2-2k-35} = \frac{3(3-k)}{(k-7)(k+5)} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{2}{k^2-2k-35} = \frac{2}{(k-7)(k+5)} \end{cases} \quad \checkmark$$

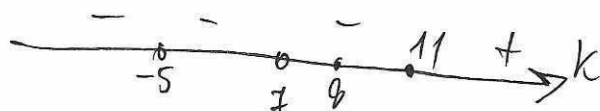
$x_1 \leq 2x_2 \Rightarrow x_1 + x_2 \leq 3x_2 \quad \text{и} \quad x_1 \cdot x_2 \leq 2(x_2)^2$

$x_1 = \frac{3(3-k)}{(k-7)(k+5)} - x_2 \leq 2x_2 \Rightarrow \frac{3-k}{(k-7)(k+5)} \leq x_2$

$x_1 \cdot x_2 = \frac{2}{(k-7)(k+5)} \leq 2 \cdot (x_2)^2$

$\frac{2}{(k-7)(k+5)} \leq \frac{2 \cdot (3-k)^2}{(k-7)^2(k+5)^2}$

$\frac{(k-7)(k+5) - (3-k)^2}{(k-7)^2(k+5)^2} \geq 0 \quad \checkmark$



$8 \leq k \leq 11 \quad \checkmark$



Искомая вероятность $P = \frac{11-8}{13-8} = 0,6 \quad \checkmark$

Ответ: 0,6 $\checkmark$

(20)



ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР

1 0 2 4 7 0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Бланк олимпиадной работы

O_1 - центр полусферы

O - центр одного из разрезов

$O_1O \perp X$ - искомого значения

$$\angle OO_1A = \frac{360^\circ/4}{2} = \frac{180^\circ}{4}$$

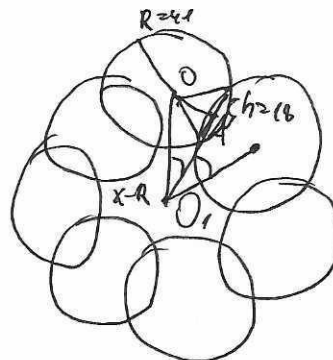
$$\Delta OO_1A : \tan \angle OO_1A = \frac{R}{h}$$

$$\Delta OO_1OS : \sqrt{R^2 - h^2/4} = 40 = OS$$

$$\sin \angle OO_1S = \frac{OS}{O_1O} = \frac{40}{O_1O} = \sin \angle \frac{180^\circ}{4} \Rightarrow O_1O = \frac{40}{\sin(\frac{180^\circ}{4})}$$

$$\angle OO_1S = \frac{360^\circ}{4 \cdot 2} \Rightarrow O_1O = 40 \cdot \sin \frac{180^\circ}{4}$$

Ответ: $O_1O = 40 / \sin \frac{180^\circ}{4}$; $S = ?$



8