

Бланк олимпиадной работы

Класс 11 Вариант 21 Дата Олимпиады 12.02.2023

Площадка написания МГТУ им. Баумана

ОЦЕНКА

(заполняется проверяющим)

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	10	15	20	20	2					72	семьдесят два	<i>[Signature]</i>

Задача 1.

$$\frac{a^{12} + 729^2}{729 \cdot a^6}$$

$$= \frac{a^6}{729} + \frac{729}{a^6} = \left(\frac{a}{3}\right)^6 + \left(\frac{3}{a}\right)^6 = *$$

~~$$\left(\frac{a}{3}\right)^6 + \left(\frac{3}{a}\right)^6$$~~

$$\frac{a}{3} - \frac{3}{a} = 2 \Rightarrow \left(\frac{a}{3} - \frac{3}{a}\right)^6 = 2^6$$

$$\underbrace{\left(\frac{a}{3}\right)^6 + \left(\frac{3}{a}\right)^6}_\pm - 6 \cdot \left(\frac{a}{3}\right)^5 \cdot \frac{3}{a} + 15 \left(\frac{a}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{a}\right)^2 - 20 \cdot \left(\frac{a}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{a}\right)^3 + 15 \left(\frac{a}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{a}\right)^4 - 6 \left(\frac{a}{3}\right) \cdot \left(\frac{3}{a}\right)^5 = 64$$

$$\pm - 6 \cdot \left(\frac{a}{3}\right)^4 + 15 \left(\frac{a}{3}\right)^2 - 20 + 15 \left(\frac{3}{a}\right)^2 - 6 \left(\frac{3}{a}\right)^4 = 64$$

$$\pm = 84 + 6 \left(\left(\frac{a}{3}\right)^4 + \left(\frac{3}{a}\right)^4 \right) - 15 \left(\left(\frac{a}{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{a}\right)^2 \right)$$

$$\left(\frac{a}{3} - \frac{3}{a}\right)^2 = 4 \Rightarrow \left(\frac{a}{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{3}{a} = 4$$

$$\Rightarrow \left[\left(\frac{a}{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{a}\right)^2\right] = 6 \checkmark$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a}{3}\right)^4 + \left(\frac{3}{a}\right)^4 + 2 \cdot \left(\frac{a}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{a}\right)^2 = 36$$

$$\Rightarrow \left[\left(\frac{a}{3}\right)^4 + \left(\frac{3}{a}\right)^4\right] = 34 \checkmark$$



ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

ШИФР

107769

0123456789

Бланк олимпиадной работы

$$\Rightarrow t = 84 + 6 \cdot 34 - 15 \cdot 6 = 84 + 6 \cdot (34 - 15) = 198$$

$$* = 198. \checkmark$$

Ответ: 198. (5)

Задача 2.

Дано:

ABCD - квадрат

AB = $2\sqrt{3}$ см

$\angle ECF = 30^\circ$

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

R - ?

Решение:

$$OH = ON = R$$

$$OH \perp AD$$

$$ON \perp AB \Rightarrow O \in \text{дуге } \angle NAH$$

ABCD - квадрат

$$\Rightarrow C \in \text{дуге } \angle BAD$$

$$\angle BAD = \angle NAH = 90^\circ$$

$$\Rightarrow A \in OC \quad (O - \text{дуге } \angle BAD \angle NAH)$$

$$CE = CF \quad (\text{кас. к окруж. } (O; R))$$

$$\Rightarrow CO - \text{дуге } \angle ECF, (\angle ECF = 30^\circ)$$

$$\Rightarrow \angle OCE = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ$$

$$OE \perp CE \quad (\text{об-ва кас.}) \Rightarrow \sin 15^\circ = \frac{OE}{OC} = \frac{R}{OC}$$

$$OC = AO + AC$$

$$ABCD - \text{квадрат} \Rightarrow AC = AB\sqrt{2} = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{6} \text{ (см)}$$

$$OH \perp AD$$

$$ON \perp AB$$

$$\angle NAH = 90^\circ$$

$$ON = OH = R$$

$$\Rightarrow ANOH - \text{квадрат} \Rightarrow AO = OH\sqrt{2} = R\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow OC = R\sqrt{2} + 2\sqrt{6} \Rightarrow \sin 15^\circ = \frac{R}{R\sqrt{2} + 2\sqrt{6}}$$

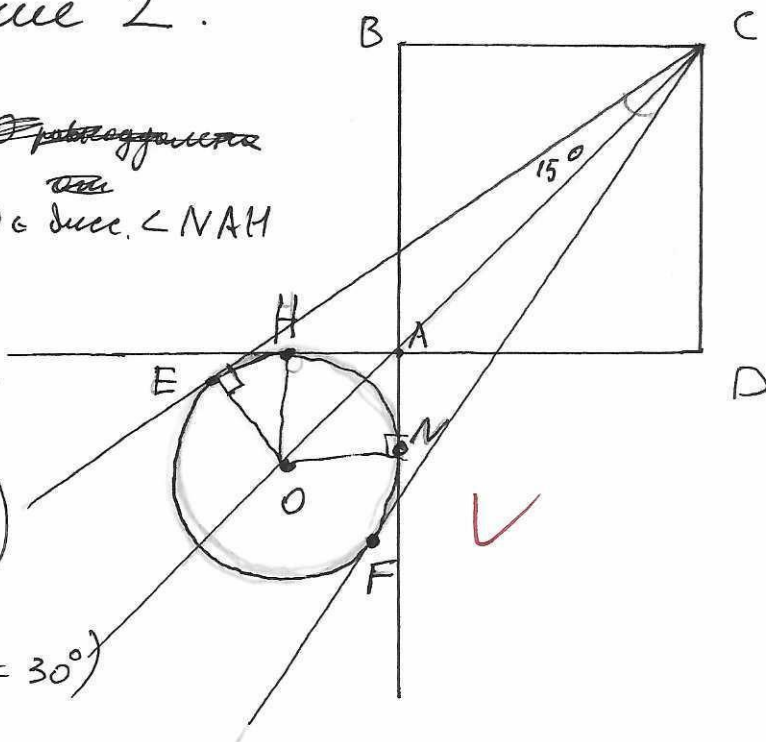
$$R = R\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} + 2\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}; R = R \frac{\sqrt{3}-1}{2} + 3 - \sqrt{3}$$

$$R(1 - \frac{\sqrt{3}-1}{2}) = 3 - \sqrt{3} \Rightarrow R = \frac{3 - \sqrt{3}}{\frac{2-\sqrt{3}+1}{2}} = 2.$$

Ответ: 2.

(10)

Лист 2 из 6



Бланк олимпиадной работы

Задача 3

$$+ \begin{cases} x^2 - 22y - 69z + 703 = 0 \\ y^2 + 23x + 23z - 1473 = 0 \\ z^2 - 63x + 66y + 2183 = 0 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 40x + 44y - 46z + 1413 = 0 \quad \checkmark$$

$$(x - 20)^2 + (y + 22)^2 + (z - 23)^2 = 0 \quad \checkmark$$

$$\begin{cases} x = 20 \\ y = -22 \\ z = 23 \end{cases} \quad (x; y; z)$$

Ответ $(20; -22; 23)$

15

Задача 4

ABCDEFG - правильные

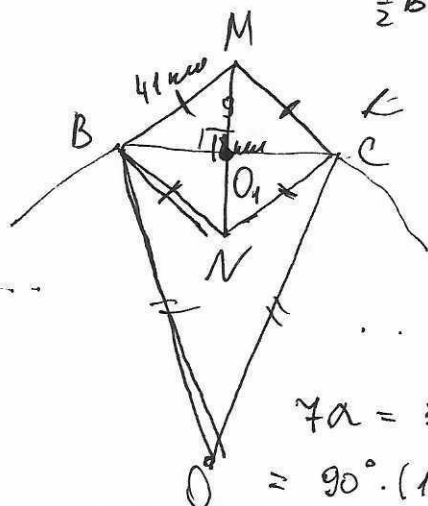
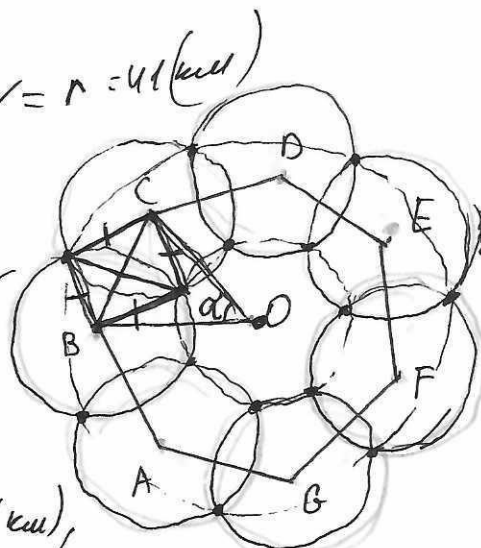
$r = 41$ км

$h = 18$ км

$R_{\max} - ?$

$S - ?$

$BM = CM = CN = BN = r = 41$ (км)
 $\Rightarrow BM CN$ - ромб
 $\Rightarrow BC \perp MN$,
 $BO_1 = CO_1, MO_1 = NO_1$
 $\frac{1}{2} BC \quad \frac{1}{2} MN$



$$MN = h = 18 \text{ км}$$

$$\Rightarrow MO_1 = \frac{18}{2} = 9 \text{ (км)}$$

$$BM = 41 \text{ (км)}$$

$$\Rightarrow BO_1 = \sqrt{41^2 - 9^2} = 40 \text{ (км)} \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow BC = 2BO_1 = 80 \text{ (км)}$$

$$7\alpha = 360^\circ \Rightarrow \alpha = \frac{360^\circ}{7} \Rightarrow \angle BCO = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = \frac{180^\circ - \frac{360^\circ}{7}}{2} = 90^\circ \cdot \left(1 - \frac{2}{7}\right) = 90^\circ \cdot \frac{5}{7}$$

$$\Rightarrow R_{\max} = BO = BC \cdot \frac{\sin \angle BCO}{\sin \alpha} = 80 \cdot \frac{\sin 90^\circ \cdot \frac{5}{7}}{\sin \frac{360^\circ}{7}} \text{ (км)} \quad \checkmark$$

Лист 3 из 6

Бланк олимпиадной работы

~~8122300~~

$$\left. \begin{array}{l} BN = CN \\ BO = CO \\ BO_1 = CO_1 \\ BM = CN \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} N, O_1, M \in \text{луч.} \angle BOC \\ MN \perp BC \\ (\text{по гок.}) \end{array} \right\} \Rightarrow OO_1 \perp BC.$$

$$\Rightarrow \sin \angle BCO = \frac{OO_1}{R_{\max} = R_{\max}} \Rightarrow OO_1 = R_{\max} \cdot \sin \angle BCO =$$

$$= \frac{80 \cdot \sin^2 90^\circ \cdot \frac{5}{7}}{\sin \frac{360^\circ}{7}}$$

$$ON = OO_1 - 9$$

$$OM = OO_1 + 9$$

$$\Rightarrow S = \pi OM^2 - \pi ON^2 = \pi (OO_1 + 9 - OO_1 + 9)(OO_1 + 9 + OO_1 - 9) =$$

$$= 18\pi \cdot 2 \cdot OO_1 = 2880\pi \cdot \frac{\sin^2 90^\circ \cdot \frac{5}{7}}{\sin \frac{360^\circ}{7}} \text{ (км}^2\text{)}$$

Ответ: $80 \cdot \frac{\sin(90^\circ \cdot \frac{5}{7})}{\sin(\frac{360^\circ}{7})} \text{ км}; 2880\pi \cdot \frac{\sin^2(90^\circ \cdot \frac{5}{7})}{\sin(\frac{360^\circ}{7})} \text{ км}^2.$

Задание 5

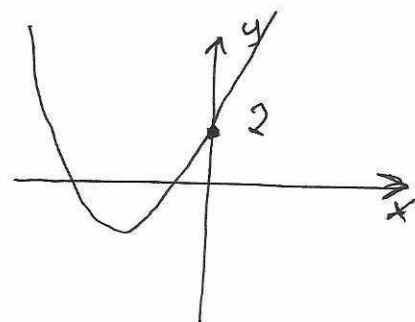
$$K \in [8; 13]$$

$$(K^2 - 2K - 35)x^2 + (3K - 9)x + 2 = 0$$

$$(K - 4)(K + 5)x^2 + (3K - 9)x + 2 = 0$$

$$K \in [8; 13] \Rightarrow \text{ветви } \nearrow.$$

$$x_0 = \frac{-3(K-3)}{2(K-4)(K+5)} \Rightarrow x_0 < 0.$$



$$D = 9(K-3)^2 - 8(K-4)(K+5) = 9(K^2 - 6K + 9) - 8(K^2 - 2K - 35) =$$

$$= K^2 - 38K + 361 = (K - 19)^2$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-3K+9+K-19}{2(K^2-2K-35)} = \frac{-2K-10}{2(K+5)(K-4)} = \frac{-1}{K-4}$$

$$x_2 = \frac{-3K+9-K+19}{2(K^2-2K-35)} = \frac{-4K+28}{2(K+5)(K-4)} = \frac{-2}{K+5}$$

Бланк олимпиадной работы

$$x_2 \vee x_{0,1}$$

$$\frac{-2}{\underbrace{k+5}_{\geq 0}} \vee \frac{-1}{\underbrace{k-7}_{\geq 0}} \quad (k \in [8; 13])$$

$$k+5 \vee 2k-14$$

$$\begin{array}{l} 19 \vee k \\ k \in [8; 13] \end{array} \Bigg| \Rightarrow 19 > k$$

||

$x_2 > x_{0,1}$ - соответствует условию

при $x_1 \leq 2x_2$: $\frac{-1}{\underbrace{k-7}_{\geq 0}} \leq 2 \cdot \frac{-2}{\underbrace{k+5}_{\geq 0}} \quad k \in [8; 13]$

$$-(k+5) \leq -4(k-7)$$

$$4k - 28 \leq k + 5$$

$$3k \leq 33$$

$$\boxed{k \leq 11} \quad \checkmark$$

$\Rightarrow$

при $k \in [8; 11] : x_1 \leq 2x_2$

при $k \in (11; 13] : x_1 > 2x_2$

P - вероятность

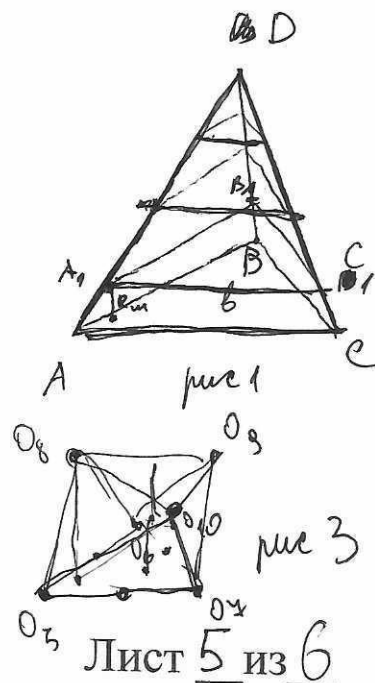
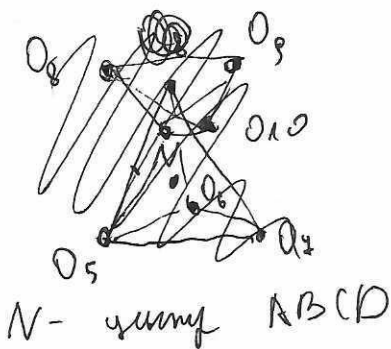
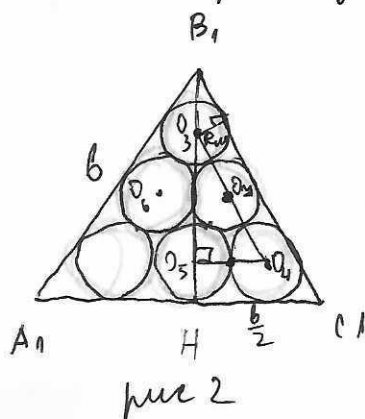
$$P = \frac{11-8}{13-8} = \frac{3}{5} = 0,6. \quad \checkmark$$

Ответ: 0,6.

(20)

Задача 6

ABCD - пирамида из шаров, правильная





$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР

107769

0123456789

Бланк олимпиадной работы

$$R = \sqrt{6} + 1 \quad - \text{отсюда выразить } ABCD.$$

$$AB = a \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{3} = BH = h$$

$$OH = \frac{1}{4} BH = \frac{a\sqrt{3}}{12}$$

$$\triangle OHA: \underbrace{6+1+2\sqrt{6}}_7 = \frac{a^2 \cdot 3}{144 \cdot 48} + \frac{a^2 \cdot 3}{9 \cdot 3}$$

$$\Rightarrow a^2 \left(\frac{1}{48} + \frac{1}{3} \right) = 4 + 2\sqrt{6} ; a^2 = \frac{48(4+2\sqrt{6})}{17}$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{\frac{48(4+2\sqrt{6})}{17}}$$

~~по с. 69~~ ~~выражение~~:

$$\frac{AA_1}{R_{\text{ш}}} = \sqrt{3} ;$$

$$\frac{A_1D}{AD} = \frac{A_1C}{AC}$$

$$\frac{a - AA_1}{a} = 1 - \frac{AA_1}{a}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{AA_1}{a} = \frac{A_1C}{a}$$

$$a - AA_1 = A_1C ; a - \sqrt{3} R_{\text{ш}} = A_1C$$

$$\text{рис 2: } \frac{AA_1}{R_{\text{ш}}} = \sqrt{3}$$

$$C_1H = \frac{b}{2}$$

$$B_1H = \frac{b\sqrt{3}}{2}$$

$$\angle C_1B_1H = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

$$\Rightarrow B_1O_3 = 2R_{\text{ш}}$$

$$\Rightarrow O_3O_4 = 4R_{\text{ш}}$$

$$HO_5 = R_{\text{ш}}$$

$$\Rightarrow O_3O_5 = \frac{b\sqrt{3}}{2} - 3R_{\text{ш}}$$

$$\frac{O_3O_5}{B_1H} = \frac{O_3O_4}{B_1C_1} \Rightarrow \frac{\frac{b\sqrt{3}}{2} - 3R_{\text{ш}}}{\frac{b\sqrt{3}}{2}} = \frac{4R_{\text{ш}}}{b} ;$$

$$1 - \frac{6R_{\text{ш}}}{b\sqrt{3}} = \frac{4R_{\text{ш}}}{b}$$

$$b - 2\sqrt{3}R_{\text{ш}} = 4R_{\text{ш}}$$

$$a - \sqrt{3}R_{\text{ш}} - 2\sqrt{3}R_{\text{ш}} = 4R_{\text{ш}}$$

$$R_{\text{ш}}(4 + 3\sqrt{3}) = a$$

$$\text{рис 3 } O_5O_{10} = O_5O_4 = 2R_{\text{ш}}$$

?

2