



ОТРАСЛЕВАЯ  
ОЛИМПИАДА  
ШКОЛЬНИКОВ

ШИФР

115462

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



1 2 3 4 5 6 7 8 9

# Бланк олимпиадной работы

Класс 10 Вариант 21 Дата Олимпиады 12.02.23

Площадка написания МГТУ им. И.Э. Баумана

## ОЦЕНКА

(заполняется проверяющим)

| Задача | 1 | 2  | 3  | 4 | 5  | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | $\Sigma$ |             | Подпись |
|--------|---|----|----|---|----|---|---|---|---|----|----------|-------------|---------|
|        |   |    |    |   |    |   |   |   |   |    | Цифрой   | Прописью    |         |
| Оценка | 5 | 10 | 15 | 0 | 20 | 0 |   |   |   |    | 50       | шестидесять |         |

1. Пусть  $\frac{a}{3} = t$ , ~~тогда  $\frac{3}{a} = \frac{1}{t}$ ,  $t - \frac{1}{t} = 2$ .~~

тогда  $\frac{3}{a} = \frac{1}{t}$ ,  $t - \frac{1}{t} = 2$ .

$$\frac{a^{12} + 729^2}{729a^6} = \frac{a^{12} + 3^{12}}{3^6 \cdot a^6} = \frac{a^6}{3^6} + \frac{3^6}{a^6} = \left(\frac{a}{3}\right)^6 + \left(\frac{3}{a}\right)^6 = t^6 + \frac{1}{t^6}$$

Возвернем  $(t - \frac{1}{t})$  в квадрат, получим:

$$t^2 - 2 + \frac{1}{t^2} = (t - \frac{1}{t})^2 = 2^2 = 4$$

$$t^2 + \frac{1}{t^2} = 4 + 2 = 6$$

$$t^3 - \frac{1}{t^3} = (t - \frac{1}{t})(t^2 + 1 + \frac{1}{t^2}) = 2 \cdot (6 + 1) = 14$$

Возвернем  $(t^3 - \frac{1}{t^3})$  в квадрат, получим: (5)

$$(t^3 - \frac{1}{t^3})^2 = t^6 - 2 + \frac{1}{t^6}$$

$$t^6 + \frac{1}{t^6} = (t^3 - \frac{1}{t^3})^2 + 2 = 14^2 + 2 = 196 + 2 = 198$$

Итак:  $\frac{a^{12} + 729^2}{729a^6} = 198$  Ответ: 198 Лист 1 из 4

Бланк олимпиадной работы

$$3. \begin{cases} x^2 - 22y - 69z + 703 = 0 \\ y^2 + 23x + 23z - 1473 = 0 \\ z^2 - 63x + 66y + 2183 = 0 \end{cases}$$

сложим все 3 уравнения; Получим:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 22y - 69z + 703 + 23x + 23z - 1473 - 63x + 66y + 2183 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 44y - 46z - 40x + 1413 = 0$$

$$(x^2 - 40x + 400) + (y^2 + 44y + 484) + (z^2 - 46z + 529) = 0$$

$$\underbrace{(x-20)^2}_{\geq 0} + \underbrace{(y+22)^2}_{\geq 0} + \underbrace{(z-23)^2}_{\geq 0} = 0$$

Сумма квадратов равна нулю  $\Leftrightarrow$  каждый квадрат равен 0.

Имеем:

$$\begin{cases} x - 20 = 0 \\ y + 22 = 0 \\ z - 23 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = -22 \\ z = 23 \end{cases}$$

15

Ответ: (20; -22; 23)

$$5. (k^2 - 2k - 35)x^2 + (3k - 9)x + 2 = 0, \quad k \in [8; 13]$$

$$(k-7)(k+5)x^2 + 3(k-3)x + 2 = 0$$

$$D = 9(k^2 - 6k + 9) - 8(k^2 - 2k - 35) = 9k^2 - 54k + 81 - 8k^2 + 16k + 280 = k^2 - 38k + 361 = (k-19)^2$$

Бланк олимпиадной работы

$$x_1 = \frac{9-3k+k-19}{(k-7)(k+5)} = \frac{-2k-10}{(k-7)(k+5)} = \frac{-2(k+5)}{(k-7)(k+5)} = \frac{-2}{(k-7)}$$

$$x_2 = \frac{9-3k+19-k}{(k-7)(k+5)} = \frac{-4k+28}{(k-7)(k+5)} = \frac{-4(k-7)}{(k-7)(k+5)} = \frac{-4}{(k+5)}$$

Пусть  $x_1 = \frac{-2}{k-7}$ ,  $x_2 = \frac{-4}{k+5}$ , тогда по условию

$$-\frac{2}{k-7} \leq 2 \cdot \left(-\frac{4}{k+5}\right)$$

$$-\frac{2}{k-7} \leq -\frac{8}{k+5}$$

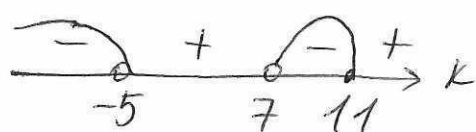
$$\frac{1}{7-k} \leq -\frac{4}{k+5}$$

$$\frac{1}{7-k} + \frac{4}{k+5} \leq 0$$

$$\frac{k+5+28-4k}{(7-k)(k+5)} \leq 0 \quad ; \quad \frac{-3k+33}{(7-k)(k+5)} \leq 0$$

$$\frac{-3(k-11)}{-(k-7)(k+5)} \leq 0; \quad \frac{k-11}{(k-7)(k+5)} \leq 0$$

Решим методом интервалов: нули числ.: 11  
 корни знамен.: -5; 7



$$k \in (-\infty; -5) \cup (7; 11],$$

но по усл.  $k \in [8; 13] \Rightarrow$

$\Rightarrow$  Имеем:  $\begin{cases} k < -5 \\ 7 < k \leq 11 \\ 8 \leq k \leq 13 \end{cases} \Leftrightarrow 8 \leq k \leq 11$  — диапазон.



# Бланк олимпиадной работы

$$p = \frac{n_{\text{благор}}}{n_{\text{общ.}}}$$

$$n_{\text{благор}} = 11 - 8 = 3$$

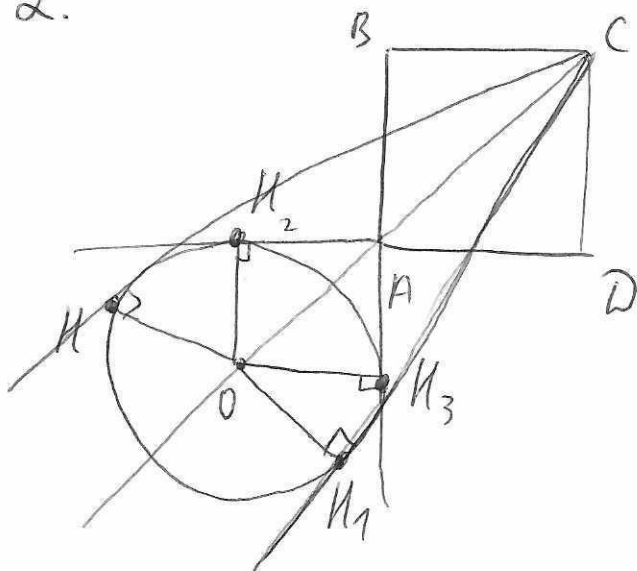
$$N_{обш} = 13 - 8 = 5$$

$$p = \frac{3}{5} = 0,6$$

Ombens: 0,6

20

2.



$ABCD$  - квадрат,  $a = 2\sqrt{3}$

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$\angle HCH_1 = 30^\circ$$

$$r = ?$$

1.  $CH_3CH_2-$ кис.,  $\angle OH, C=90^\circ$

2.  $\text{CO}-\text{CH}_2-\text{CH}_2$ ,  $\angle \text{HCH}_2 = 30^\circ$   
 $\Rightarrow \angle \text{OCH}_2 = 15^\circ$

3. очевидно, что  $O, A, C$  лежат на одной прямой

4. AC ~~или~~ диагональ в  
кв  $\Rightarrow AC = \sqrt{2}a = 2\sqrt{6}$

5. Т.к. отрезки кас. из  
Т.А равны  $\Rightarrow AM_2 = AM_3$ ,

$$\angle H_2 A H_3 = 90^\circ \Rightarrow$$

$\Rightarrow \text{Al}_2\text{O}_3$  - кварц

б.  $OA$  — радиус  $KB \Rightarrow OA = \sqrt{2}r$   
(т.к.  $OK_2 = r = AK_2 = AK_3 = OK_3$ )

7. В  $\triangle OCH_1$  — прямоугол. (т.к.  $CH_1 \perp$  кас.)  
 $\angle OCH_1 = \sin 15^\circ = \frac{OH_1}{OC}$

$$\sin \angle OCH_1 = \sin 15^\circ = \frac{OH_1}{OC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{r}{r\sqrt{2} + 2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$\frac{r}{r+2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \Rightarrow r=2$$

Orbit: 2

Лист 4 из 4