

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР

107815

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Бланк олимпиадной работы

+1

Класс 11 Вариант 21 Дата Олимпиады 12.02.2023

Площадка написания МГТУ им. Баумана

ОЦЕНКА

(заполняется проверяющим)

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	10	15	0	20	—					50	пятьдесят	<i>Кто</i>

N1

$$\frac{a}{3} - \frac{3}{a} = 2 \quad | \cdot 3a \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a^2 - 9 = 6a \\ a \neq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a^2 - 6a - 9 = 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$$

$$a^2 - 6a - 9 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 3^2 + 9 = 18$$

$$a_{1,2} = 3 \pm 3\sqrt{2}$$

$$\frac{a^{12} + 429^2}{429a^6} = \frac{a^6}{429} + \frac{429}{a^6} = \left(\frac{a}{3}\right)^6 + \left(\frac{3}{a}\right)^6$$

$$a^6 = (3 + 3\sqrt{2})^6 = ((3 + 3\sqrt{2})^3)^2 =$$

$$1) a = 3 + 3\sqrt{2}$$

$$\left(\frac{3 + 3\sqrt{2}}{3}\right)^6 + \left(\frac{3}{3 + 3\sqrt{2}}\right)^6 = \frac{1 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} (1 + \sqrt{2})^6 + \left(\frac{1}{1 + \sqrt{2}}\right)^6$$

2)

Бланк олимпиадной работы

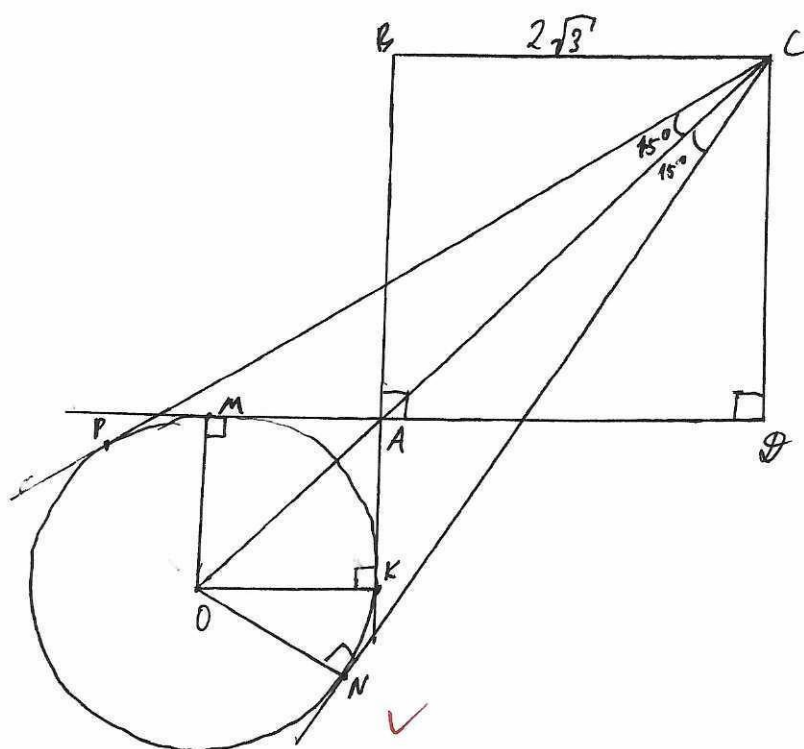
$$(1+\sqrt{2})^6 = ((1+\sqrt{2})^3)^2 = (1+3\sqrt{2}+3\cdot 2+2\sqrt{2})^2 = (4+5\sqrt{2})^2 = 49+40\sqrt{2}+50 = 99+40\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{99+40\sqrt{2}} = \frac{99-40\sqrt{2}}{99^2-40^2\cdot 2} = \frac{99-40\sqrt{2}}{9801-9800} = 99-40\sqrt{2}$$

$$99+40\sqrt{2} + 99-40\sqrt{2} = 198$$

Ответ: 198 ✓ (5)

N2



Дано:

$ABCD$ - квадрат

$\omega(O; OK)$ касается
прямых AD и AB в
т. M и K соотв.

$AB = 2\sqrt{3}$ см

CN, CP - касат. к окр ω .

$N, P \in \omega$

$\angle PCN = 30^\circ$

$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

Найти: OK

Бланк олимпиадной работы

Решение:

- 1) Пусть $OK = R$, тогда $OM = OK = ON = OP = R$ как радиусы окр. ω .
- 2) $\angle ONC = 90^\circ$ $ON \perp NC$ как радиус пр. в т. касания, тогда $\triangle ONC$ - прямоугол.
- 3) OC - биссектриса $\angle PCN$ кр., т.к. окр. ω впис. в $\angle PCN$
- 4) OA - биссектриса $\angle MAK$, т.к. окр. ω впис. в $\angle MAK$
 $A \in OC$.
- 5) Из $\triangle ONC$:

$$\sin \angle OCN = \frac{ON}{OC}$$

$$\sin 15^\circ = \frac{R}{OC}$$

$$\frac{R}{OC} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$OC = \frac{2\sqrt{2}R}{\sqrt{3}-1} = \frac{2\sqrt{2}R(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = R\sqrt{2}(\sqrt{3}+1) = R\sqrt{6} + R\sqrt{2} \quad \checkmark$$
- 6) Из $\triangle ADC$ по т-ме Пифагора:

$$AC^2 = AD^2 + DC^2$$

$$AC = (2\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3})^2 = 2\sqrt{6}$$
- 7) $AO = OC - AC = R\sqrt{6} + R\sqrt{2} - 2\sqrt{6}$
- 8) $\angle OKA = 90^\circ$, т.к. OK - радиус пр. к т. касания.
 $\angle MAB = \angle OAK = 45^\circ$ } $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \triangle OKA$ - р.б. прямоугол., т.е.
 $OK = AK = R$

Бланк олимпиадной работы

9) Из $\triangle OKA$ по т-те синусов:

$$\frac{OA}{\sin 90^\circ} = \frac{OK}{\sin 45^\circ}$$

$$OA = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot OK$$

$$OA = \frac{2}{\sqrt{2}} R$$

$$R\sqrt{6} + R\sqrt{2} - 2\sqrt{6} = \frac{2}{\sqrt{2}} R$$

$$R\sqrt{3} + R - 2\sqrt{3} = R$$

$$R\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$R = 2$$

Ответ: 2 ✓

10

№3

$$\begin{cases} x^2 - 22y - 69z + 403 = 0 \\ y^2 + 23x + 23z - 1443 = 0 \\ z^2 - 63x + 66y + 2183 = 0 \end{cases}$$

Сложим все 3 ур-ия: ✓

$$x^2 + y^2 + z^2 + 23x - 63x + 66y - 22y + 23z - 69z + 2183 + 403 - 1443 = 0$$

$$x^2 - 40x + 400 + y^2 + 44y + 484 + z^2 - 46z + 529 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x - 20)^2 + (y + 22)^2 + (z - 23)^2 = 0 \Rightarrow \checkmark$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 20 = 0 \\ y + 22 = 0 \\ z - 23 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = -22 \\ z = 23 \end{cases}$$

Ответ: (20; -22; 23) ✓

15

Бланк олимпиадной работы

N5

$$(k^2 - 2k - 35)x^2 + (3k - 9)x + 2 = 0$$

$k \in [8; 13]$, тогда $k^2 - 2k - 35 \neq 0$, т.е. ур-е не может быть линейным.

$$\Delta = (3k - 9)^2 - 8(k^2 - 2k - 35) = 9k^2 - 54k + 81 - 8k^2 + 16k + 280 = k^2 - 38k + 361 = (k - 19)^2$$

$$x_{1,2} = \frac{9 - 3k \pm |k - 19|}{2(k^2 - 2k - 35)} \left. \vphantom{x_{1,2}} \right\} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{9 - 3k \pm (19 - k)}{2(k - 4)(k + 5)}$$

$k \in [8; 13]$

$$x_1 = \frac{9 - 3k + 19 - k}{2(k - 4)(k + 5)} = \frac{-4k + 28}{2(k - 4)(k + 5)} = -\frac{4(k - 4)}{2(k - 4)(k + 5)} = -\frac{2}{k + 5} \quad \checkmark$$

$$x_2 = \frac{9 - 3k - 19 + k}{2(k - 4)(k + 5)} = \frac{-2k - 10}{2(k - 4)(k + 5)} = -\frac{2(k + 5)}{2(k - 4)(k + 5)} = -\frac{1}{k - 4} \quad \checkmark$$

$$x_1 \leq 2x_2$$

$$-\frac{2}{k + 5} \leq -\frac{2}{k - 4} \Leftrightarrow \frac{1}{k + 5} \geq \frac{1}{k - 4} \Leftrightarrow \frac{1}{k + 5} - \frac{1}{k - 4} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{k - 4 - k + 5}{(k + 5)(k - 4)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{(k + 5)(k - 4)} \leq 0 \Rightarrow -5 \leq k \leq 4$$

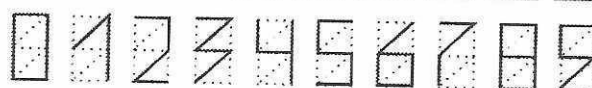
2) Если $x_1 = -\frac{1}{k - 4}$; $x_2 = -\frac{2}{k + 5}$, то

$$-\frac{1}{k - 4} \leq -\frac{2}{k + 5}$$



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Бланк олимпиадной работы

$$\frac{1}{k-4} \geq \frac{4}{k+5} \Rightarrow k+5 \geq 4(k-4) \Rightarrow k+5 \geq 4k-16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3k \leq 21 \Rightarrow k \leq 7$$

$$k \in [8; 11] \quad \checkmark$$

$$k \in [8; 13] \quad \checkmark$$

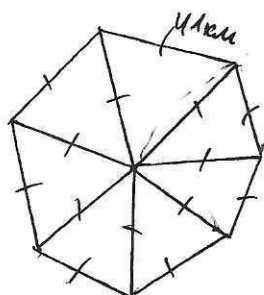
A - "точка k принадлежит [8; 11]"

$$P(A) = \frac{11-8}{13-8} = \frac{3}{5} = 0,6 \quad \checkmark$$

Ответ: 0,6 $\checkmark$

(20)

N 4



$$S = \pi \cdot 18^2$$

$$S = 324\pi$$

$\emptyset$

