



ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР

1 2 0 9 1 0

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Бланк олимпиадной работы

+ 2

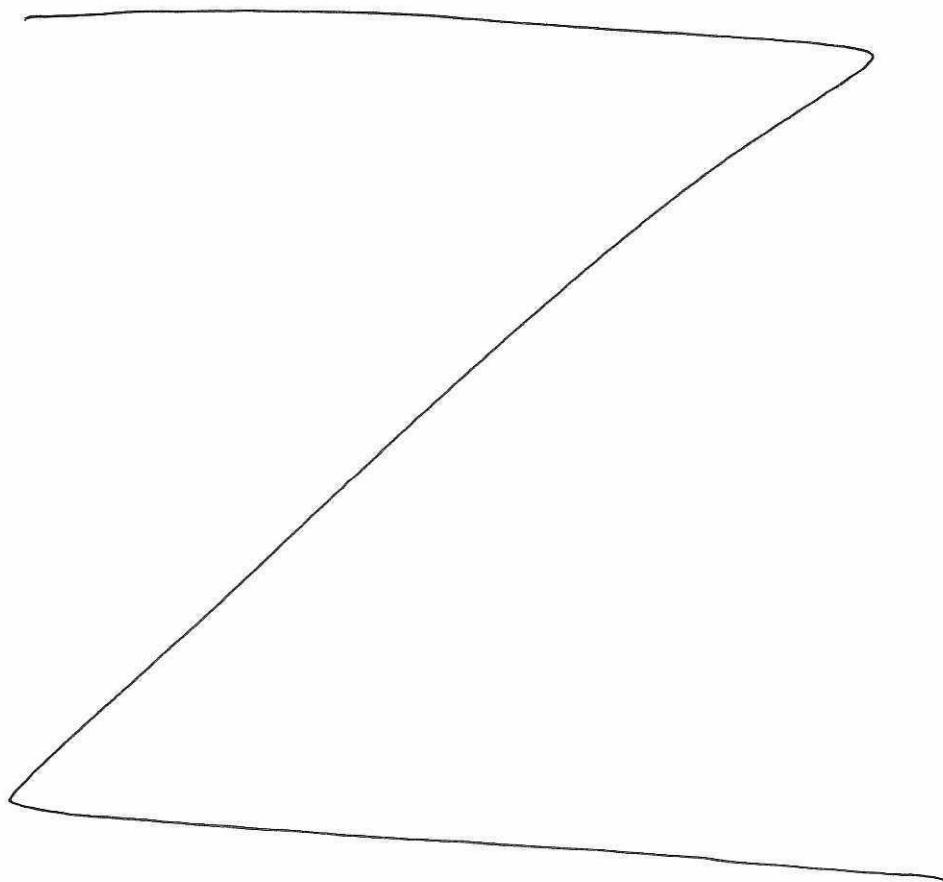
Класс 11 Вариант 21 Дата Олимпиады 12.02.23

Площадка написания МГТУ имени Баумана

ОЦЕНКА

(заполняется проверяющим)

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	10	15	—	20	10					60	шестьдесят	



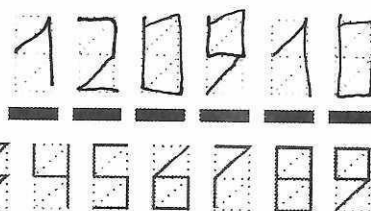


$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР



Задача 1.

Бланк олимпиадной работы

1. Дано: $\frac{a}{3} - \frac{3}{a} = 2$

Найти $\frac{a^{12} + 729^2}{729a^6} - ?$

Ограничение:
 $a \neq 0$

$$\frac{a^{12} + 729^2}{729a^6} = \frac{a^{12} + 3^{12}}{3^6 a^6} = \frac{a^6}{3^6} + \frac{3^6}{a^6}; \text{ Пусть } \frac{a}{3} = b, \text{ тогда } b - \frac{1}{b} = 2;$$

$$\frac{a^6}{3^6} + \frac{3^6}{a^6} = \left(\frac{a}{3}\right)^6 + \left(\frac{3}{a}\right)^6 = b^6 + \frac{1}{b^6}$$

$$b^6 + \frac{1}{b^6} = c^3 + \frac{1}{c^3} = 198 \quad \checkmark$$

Возведем в квадрат:

$$b^2 - 2 + \frac{1}{b^2} = 4 \Rightarrow b^2 + \frac{1}{b^2} = 6.$$

Пусть $b^2 = c$, тогда

$$c + \frac{1}{c} = 6 \quad (2)$$

Возведем в куб:

$$c^3 + 3c + \frac{3}{c} + \frac{1}{c^3} = 216$$

$$c^3 + \frac{1}{c^3} + 3\left(c + \frac{1}{c}\right) = 216$$

$$c^3 + \frac{1}{c^3} + 3 \cdot 6 = 216$$

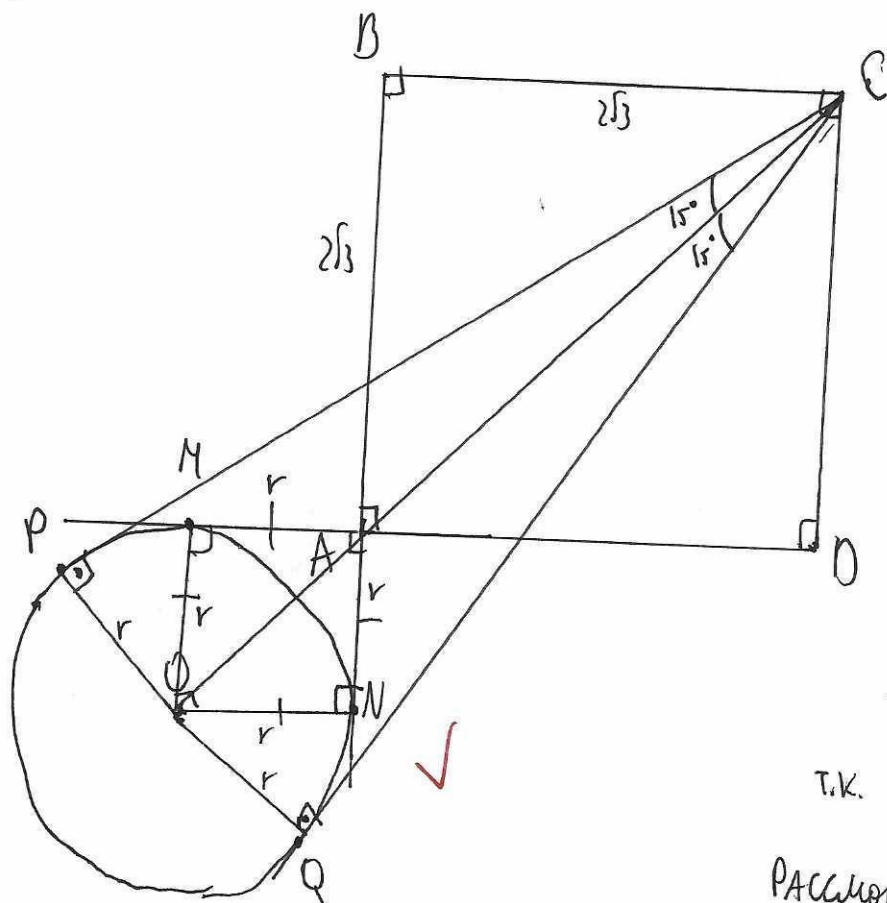
$$c^3 + \frac{1}{c^3} = 216 - 18 = 198 \quad \checkmark$$

Ответ: 198. $\checkmark$

(5)

Бланк олимпиадной работы

Задача 2



Пусть точки
P и Q - точки
касания касатель-
ных к точке C.

$$\angle PCQ = 30^\circ$$

Рамт: ометим на
бис-се $\angle PAQ$ и на
бис-се $\angle PCQ$.

Пусть M и N, это точки
касания окружности
CAD и AB.

Тогда A лежит на OC

т.к. $\angle OAN = \angle OCD$
и $AN \parallel CD$.

Рассмотрим четырехугольник
OMAN:

$$\angle OMA = \angle ONA = 90^\circ, \text{ т.к. } AM \perp AN$$

$$\angle MAN = \angle BAD = 90^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle MON = 360^\circ - 270^\circ = 90^\circ$$

OM=ON как радиусы

AM=AN как отрезки касательных.

OMAN - прямоугольник; $\Rightarrow$

$$\Rightarrow OM = AN \text{ и } MA = ON$$

$$\Rightarrow OM = ON = MA = AN \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ OMAN - квадрат.

Пусть $OM = ON = OP = OQ = r$; Тогда $AM = AN = r$.

$\triangle OMA$: у т. Пифагора $AO = \sqrt{2}r$.

$\triangle ABC$: у т. Пифагора $AC = 2\sqrt{6}$.

$$\Rightarrow OC = AO + AC = \sqrt{2}r + 2\sqrt{6}$$

$$\triangle POC \text{ прямоугол} \Rightarrow \frac{PO}{OC} = \sin 15^\circ;$$

$$\frac{r}{\sqrt{2}r + 2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow 2\sqrt{2}r = 2\sqrt{18} - 2\sqrt{6} + \sqrt{6}r - \sqrt{2}r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{2}r + \sqrt{2}r - \sqrt{6}r = 2\sqrt{18} - 2\sqrt{6} \Rightarrow (3\sqrt{2} - \sqrt{6})r = 2\sqrt{18} - 2\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow r = \frac{2\sqrt{18} - 2\sqrt{6}}{3\sqrt{2} - \sqrt{6}} = \frac{6\sqrt{2} - 2\sqrt{3}\sqrt{2}}{3\sqrt{2} - \sqrt{3}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(6-2\sqrt{3})}{\sqrt{2}(3-\sqrt{3})} = \frac{2 \cdot (3-\sqrt{3})}{3-\sqrt{3}} = 2.$$

Ответ: 2 см. ✓

10

Бланк олимпиадной работы

Задача 3:

$$\begin{cases} x^2 - 22y - 692 + 703 = 0 & (1) \\ y^2 + 23x + 232 - 1473 = 0 & (2) \\ z^2 - 63x + 66y + 2183 = 0 & (3) \end{cases}$$

Проверка:

(1) $400 + 484 - 1587 + 703 = 0 \quad \checkmark$

(2) $484 + 460 + 529 - 1473 = 0 \quad \checkmark$

(3) $529 - 1260 + 1452 + 2183 = 0 \quad \checkmark$

Сложим все три уравнения: $\checkmark$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 40x + 44y - 462 + 1413 = 0$$

$$x^2 - 40x + 400 + y^2 + 44y + 484 + z^2 - 462 + 529 = 0$$

$$(x - 20)^2 + (y + 22)^2 + (z - 23)^2 = 0 \quad \checkmark$$

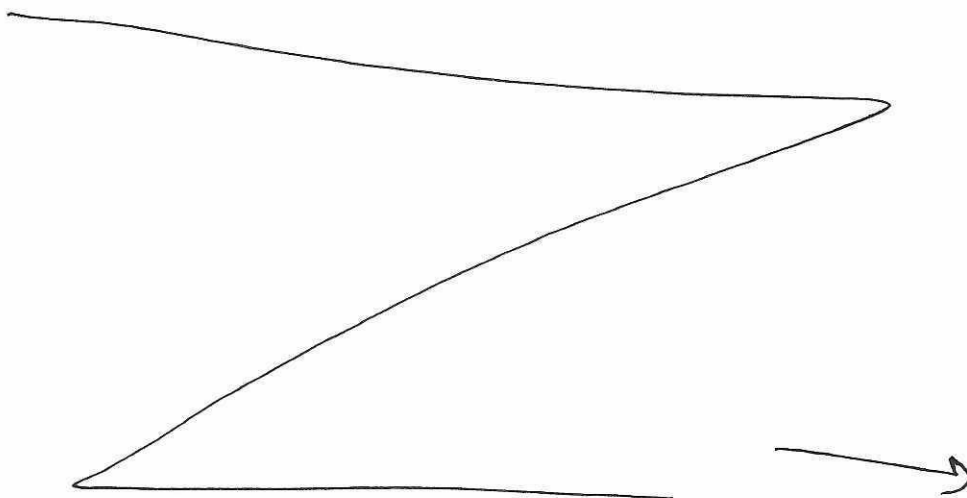
$$\Rightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = -22 \\ z = 23 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Если и есть решение, то только такое. Других быть не может.

Ответ:

$$\begin{cases} x = 20 \\ y = -22 \\ z = 23 \end{cases} \quad \checkmark$$

15



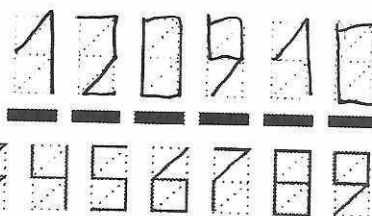


$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР



Задача 5.

Бланк олимпиадной работы

$$8 \leq k \leq 13$$

$$(k^2 - 2k - 35)x^2 + (3k - 9)x + 2 = 0$$

$$k^2 - 2k - 35 = 0:$$

$$D = (3k - 9)^2 - 4 \cdot 2(k^2 - 2k - 35) = 9k^2 - 54k + 81 - 8k^2 + 16k + 280 =$$

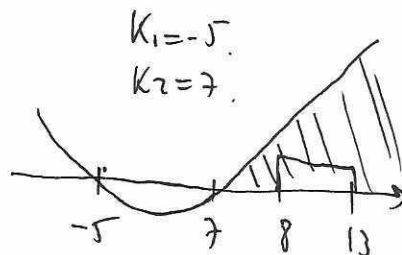
$$= k^2 - 38k + 361 = (k - 19)^2 > 0, \text{ т.к. } k \neq 19.$$

$$D = 4 + 140 = 144; k_{1,2} = \frac{2 \pm 12}{2} = 1 \pm 6$$

$$x_{3,4} = \frac{(9 - 3k) \pm \sqrt{(k - 19)^2}}{2(k^2 - 2k - 35)} = \frac{9 - 3k \pm (19 - k)}{2(k^2 - 2k - 35)}$$

$$x_3 = \frac{9 - 3k + 19 - k}{2(k^2 - 2k - 35)} = \frac{28 - 4k}{2(k + 5)(k - 7)} = \frac{4(7 - k)}{2(k + 5)(k - 7)} = \frac{-2}{k + 5}$$

$$x_4 = \frac{9 - 3k + k - 19}{2(k^2 - 2k - 35)} = \frac{-2k - 10}{2(k + 5)(k - 7)} = \frac{-k - 5}{(k + 5)(k - 7)} = \frac{-1}{k - 7}$$



$$\Rightarrow \text{при } 8 \leq k \leq 13 \quad k^2 - 2k - 35 > 0.$$

Т.к. в условии не сказано, какой корень x_1 , а какой x_2 , то рассмотрим 2 случая:

$$1) x_3 \leq 2x_4: -\frac{2}{k+5} \leq -\frac{2}{k-7}$$

$$\frac{1}{k+5} \geq \frac{1}{k-7} \quad ; k+5 > 0, k-7 > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k+5 \leq k-7$$

$$5 \leq -7 - \text{невозможно.}$$

$$P = \frac{AB}{AC} = \frac{11-8}{13-8} = \frac{3}{5} = 0,6. \quad \checkmark$$

$$2) x_4 \leq 2x_3:$$

$$-\frac{1}{k-7} \leq \frac{-4}{k+5}$$

$$\frac{1}{k-7} \geq \frac{4}{k+5}$$

$$\frac{4}{4k-28} \geq \frac{4}{k+5}$$

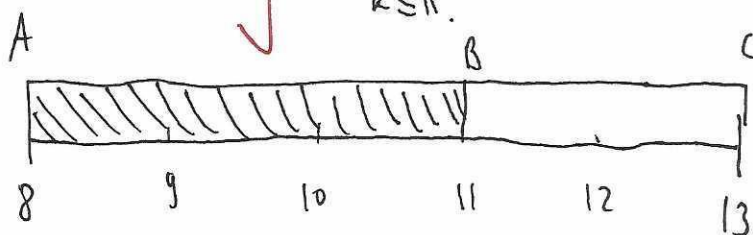
$$4k-28 > 0, k+5 > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4k-28 \leq k+5$$

$$3k-28 \leq 5$$

$$3k \leq 33$$

$$k \leq 11.$$

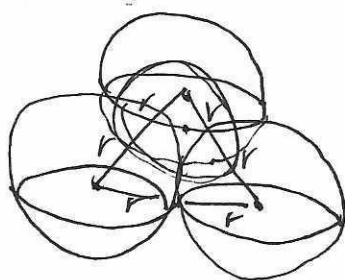


Ответ: 0,6.

20

Бланк олимпиадной работы

Задача 6. Рассмотрим пирамиду у 4 шаров, где каждый касается 3 других:



← сверху, на эти три шара помещен четвертый шар (все радиусы равны).

$ABCS$ - правильная тетраэдр
 $\Rightarrow$ высота падает в центр равностороннего пр. ABC .

Тогда, рассмотрим центры шаров: они будут вершинами тетраэдра.

~~из $\triangle ASC$ высота $SM = \sqrt{3}r$~~

Соединим K с серединой AC .

$AK = KC \Rightarrow AKC$ - равнобедренный + пр.

$\Rightarrow KC$ - высота и медиана.

$SK \perp KM$

$KM \perp AC$

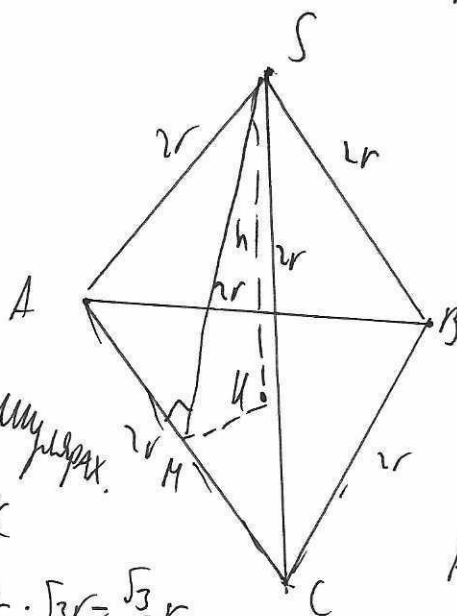
$SK \perp AC$

$\Rightarrow SM \perp AC$ по т. о трех перпендикулярах.
 SM - высота и медиана $\triangle ASC$

$$\Rightarrow SM = \sqrt{3}r. \quad MK = \frac{1}{3}MB = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3}r = \frac{\sqrt{3}}{3}r.$$

т. Пифагора:

$$SK = \sqrt{3r^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}r\right)^2} = \frac{\sqrt{24}}{3}r. \Rightarrow h = \frac{\sqrt{24}}{3}r$$



Пусть A, B, C -
 вершины - центры
 нижних шаров,
 S - центр верхнего шара.

Тогда $AB = BC = AC = r + r = 2r$.

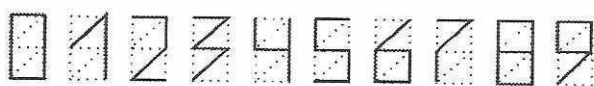
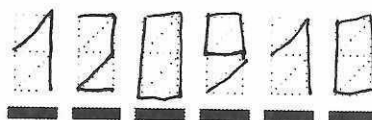
$$AS = BS = CS = 2r$$

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$

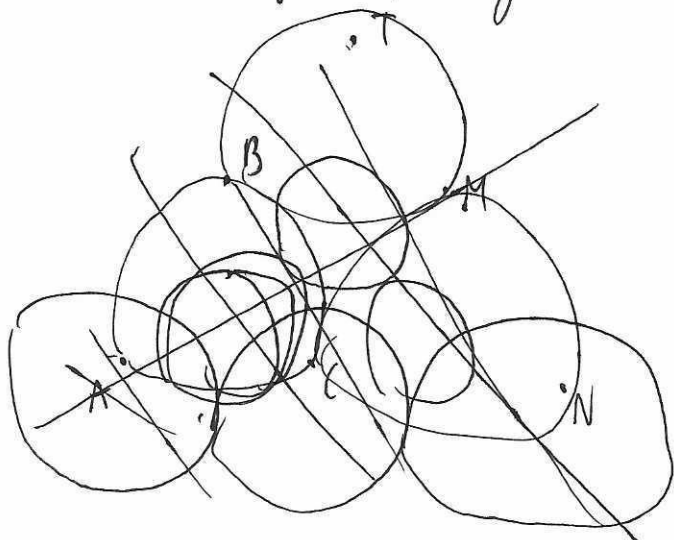


ШИФР



Бланк олимпиадной работы

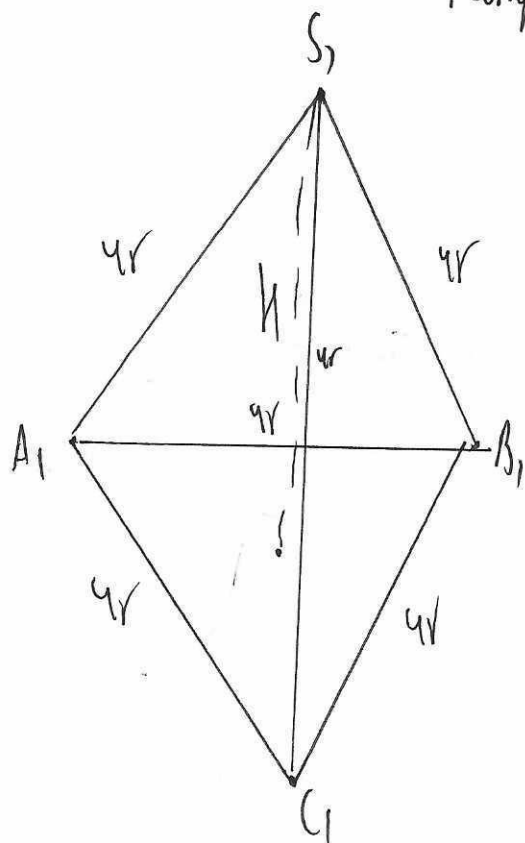
Продолжите задание 6. Большая пирамида из 10 шаров будет состоять из 4 пирамид ABCS (ABC - центры 3 нижних шаров, S - центр верхнего шара)



Аналогично будет еще 2 центра верхнего шара, и все они и S будут вершинами пирамид для своего верхнего шара.

Таким образом, ~~на~~ центры будут задавать тетраэдр в оторванной чр.

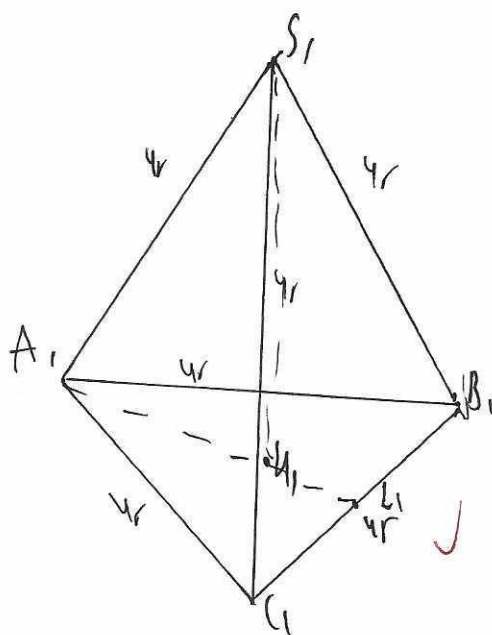
(центры трех самых нижних шаров, попарно не касающихся друг с другом и центр верхнего шара)



Данный тетраэдр будет подобен маленькому тетраэдру ABCS с коэф. 2
 $\Rightarrow$ высота $H = 2h = \frac{\sqrt{96}}{3} r$.

Бланк олимпиадной работы

Продолжение задания 6. Найдём центр описанной сферы вокруг тетраэдра $A_1B_1C_1S_1$.



Он будет лежать на S_1L_1 , где L_1 — центр $A_1B_1C_1$.

$$A_1L_1 = \frac{2}{3} A_1L_1, \text{ где } L_1 - \text{середина } C_1B_1$$

$$A_1L_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4r = 2\sqrt{3}r \Rightarrow A_1L_1 = \frac{2}{3} \cdot 2\sqrt{3}r = \frac{4\sqrt{3}}{3}r.$$

Все Δ в тетраэдре остроугольные $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ центр находится внутри тетраэдра.

Пусть $O_1L_1 = x$, тогда $O_1S_1 = L_1 - x = \frac{\sqrt{96}}{3}r - x$.

$$O_1A_1 = O_1B_1 = O_1C_1 = R.$$

$$R^2 = A_1L_1^2 + x^2 \text{ (т. тетраэдра)}. A_1L_1^2 = \frac{16}{3}r^2.$$

$$\Rightarrow R^2 = \frac{16}{3}r^2 + x^2; R^2 = O_1S_1^2 = \left(\frac{\sqrt{96}}{3}r - x\right)^2 \Rightarrow$$

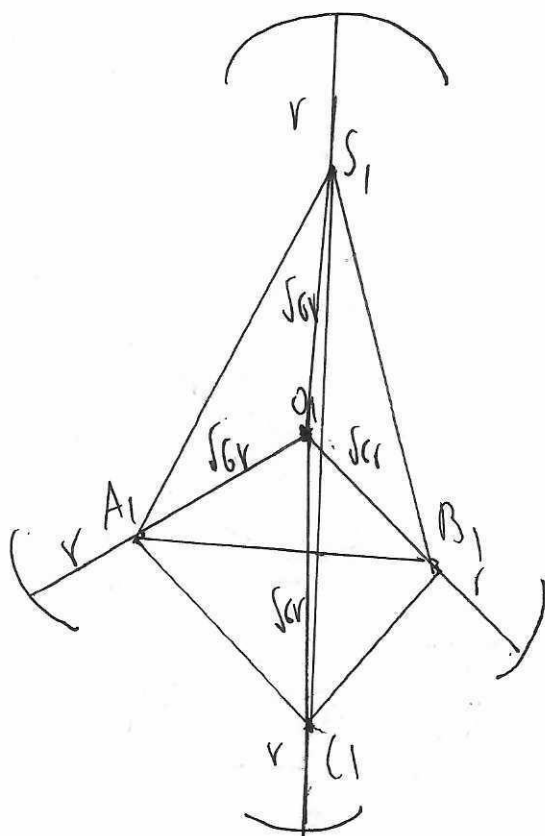
$$\Rightarrow \frac{16}{3}r^2 = \frac{2\sqrt{96}}{3}rx \Rightarrow 16r = 2\sqrt{96}x \Rightarrow x = \frac{16}{2\sqrt{96}}r = \frac{8}{\sqrt{96}}r$$

$$= \frac{8}{4\sqrt{6}}r = \frac{2}{\sqrt{6}}r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R^2 = \frac{16}{3}r^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{6}}r\right)^2 = \frac{16}{3}r^2 + \frac{4}{6}r^2 = 6r^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{R = \sqrt{6}r}$$

Бланк олимпиадной работы



+ радиус шарика.

- глисты
шариков.

$$\Rightarrow L = (\sqrt{6} + 1)r$$

по улу. $L = \sqrt{6+1} \Rightarrow$

$$(\sqrt{64})^r = \sqrt{64}$$

$$\Rightarrow r=1.$$

Радиус каждого шарика = 1. ✓



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР

120910

1123456789

Бланк олимпиадной работы

Продолжение 6.

Ответ: 3

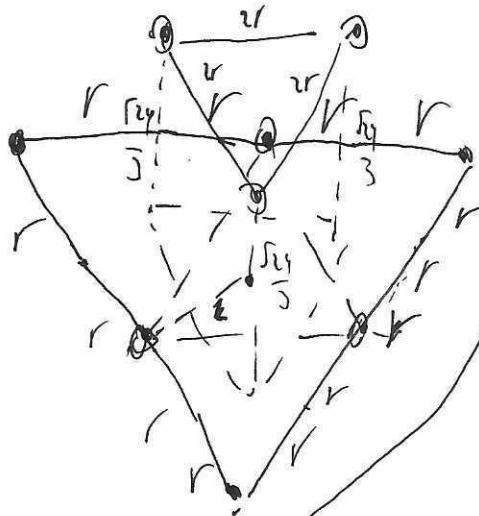
Имеем 3 шара у 6, которых во шар будет касаться:

из центров будут вершинами тетраэдра (иными вершинами)

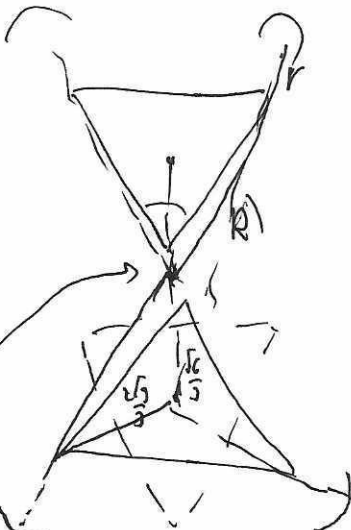
3 грани шара будут тремя углами тетраэдра (2 по высоте уровня)



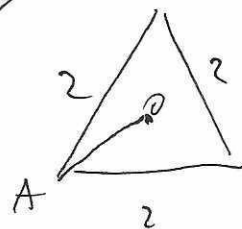
три шара в угловых
на этих шести



• - центры
иных шаров



$$\frac{\sqrt{6}}{3} \quad \frac{\sqrt{6}}{3}$$



$$AO = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

центр этого шара будет посередине

радиус шестнадцати

$$(R)^2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{6+12}{3^2} = 2$$

(шестиугольник)

Эта фигура у двух треугольников

и у которых яв. центрами шаров



⇒ если проведем от центра через каждую вершину до пересечения с южной стороной, то общий радиус = $(R+r) = 2+1 = 3$