

Бланк олимпиадной работы

Класс 11 Вариант 21 Дата Олимпиады 12.02.2023

Площадка написания _____

ОЦЕНКА

(заполняется проверяющим)

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	6	15	2	18	—					46	сорок шесть	<i>[Signature]</i>

Задача 3

$$1) \begin{cases} x^2 - 22y - 69z + 403 = 0 \\ y^2 + 23x + 23z - 1473 = 0 \\ z^2 - 63x + 66y + 2183 = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + x(23 - 63) + y(66 - 22) + z(23 - 69) + 403 + 2183 - 1473 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 40x + y^2 + 44y + z^2 - 46z + 1413 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 20x + 20^2 + y^2 + 2 \cdot 22y + 22^2 + z^2 - 2 \cdot 23z + 23^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x - 20)^2 + (y + 22)^2 + (z - 23)^2 = 0, \checkmark$$

$$2) \begin{cases} (x - 20)^2 \geq 0 \\ (y + 22)^2 \geq 0 \\ (z - 23)^2 \geq 0 \\ (x - 20)^2 + (y + 22)^2 + (z - 23)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x - 20)^2 = 0 \\ (y + 22)^2 = 0 \\ (z - 23)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = -22 \\ z = 23 \end{cases} \checkmark$$

Ответ: $\{(20; -22; 23)\}$

15

$$\begin{pmatrix} 20^2 = 400 \\ 22^2 = 484 \\ 23^2 = 529 \\ 529 + 400 = 929 \\ + 11 \\ + 929 \\ + 484 \\ \hline 1413 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2183 \\ 703 \\ \hline 2886 \\ - 2686 \\ \hline 1993 \\ - 1993 \\ \hline 0 \end{pmatrix}$$


$$(ab)c = a(bc)$$

$$F = mc^2$$



ШИФР

Бланк олимпиадной работы

[illegible]

$$1) \frac{a^{12} + 729^2}{729 \cdot a^6} = \frac{a^{12} + 3^6}{3^6 \cdot a^6} = \frac{a^6}{3^6} + \frac{3^6}{a^6} = \left(\frac{a^2}{3^2}\right)^3 + \left(\frac{3^2}{a^2}\right)^3 = \left(\frac{a^2}{3^2} + \frac{3^2}{a^2}\right) \left(\frac{a^4}{3^4} - \frac{a^2}{3^2} \cdot \frac{3^2}{a^2} + \frac{3^4}{a^4}\right) =$$

$$2) \frac{a}{3} - \frac{3}{a} = 2 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{3} - \frac{3}{a}\right)^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{a^2}{3^2} + \frac{3^2}{a^2} - 2 \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{3}{a} = 4 \Leftrightarrow \frac{a^2}{3^2} + \frac{3^2}{a^2} = 6 \quad \left(\begin{array}{l} a \neq 0, \text{ т.к. иначе} \\ \text{не определено } \frac{a}{3} - \frac{3}{a} \end{array} \right)$$

$$3) \left(\frac{a^2}{3^2} + \frac{3^2}{a^2}\right) = 6 \Leftrightarrow \left(\frac{a^2}{3^2} + \frac{3^2}{a^2}\right)^2 = 36 \Leftrightarrow \frac{a^4}{3^4} + \frac{3^4}{a^4} + 2 \cdot \frac{a^2}{3^2} \cdot \frac{3^2}{a^2} = 36 \Leftrightarrow \frac{a^4}{3^4} + \frac{3^4}{a^4} = 34 \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a^4}{3^4} + \frac{3^4}{a^4} - 1 = 33$$

$$4) \frac{a^{12} + 729^2}{729 - a^6} = \left(\frac{a^2}{3^2} + \frac{3^2}{a^2} \right) \left(\frac{a^4}{3^4} + \frac{3^4}{a^4} - 1 \right) = 6 \cdot 33 = 18 \cdot 11 = 198 \quad \checkmark$$

October: 198 ✓ (5)

Бланк олимпиадной работы

Задание 5

1) $(k^2 - 2k - 35)x^2 + (3k - 9)x + 2 = 0;$

$k^2 - 2k - 35 = (k + 5)(k - 7);$

П.к. $8 \leq k \leq 13$ (по условию), то $(k + 5)(k - 7) = k^2 - 2k - 35 > 0$, тогда

$(k^2 - 2k - 35)x^2 + (3k - 9)x + 2 = 0$ — квадратное (относительно x) уравнение, график параболы

2) ~~Итак, так как~~

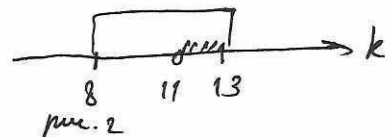
$13 \geq k \geq 8 \Leftrightarrow 39 \geq 3k \geq 24 \Leftrightarrow 30 \geq 3k - 9 \geq 15$, значит $3k - 9 > 0$

3) ~~Итак~~ По т. Виета:

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = \frac{2}{k^2 - 2k - 35} \\ x_1 + x_2 = -\frac{(3k - 9)}{(k^2 - 2k - 35)} \end{cases};$$
 П.к. $\frac{2}{k^2 - 2k - 35} > 0$, то корни уравнения x_1 и x_2 одного знака

П.к. $-\frac{(3k - 9)}{(k^2 - 2k - 35)} < 0$, ~~то~~ и корни уравнения одного знака, то оба корня уравнения

≤ 0



4) Пусть $A = k^2 - 2k - 35$; $A > 0$

$B = 3k - 9$; $B > 0$, ~~то~~

$C = 2$, тогда $(k^2 - 2k - 35)x^2 + (3k - 9)x + 2 = 0 \Leftrightarrow Ax^2 + Bx + C = 0$

5) Д. ~~дискриминант~~ $Ax^2 + Bx + C = 0$:

$D = B^2 - 4AC = (3k - 9)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (k^2 - 2k - 35) = 9k^2 - 54k + 81 - 8k^2 + 16k + 280 =$

$= k^2 - 38k + 361 = (k - 19)^2;$ -

т.к. ~~так как~~ $8 \leq k \leq 13$, то $D = (k - 19)^2 > 0$, значит при $\forall k \in [8; 13]$ ~~есть~~ 2 корня $Ax^2 + Bx + C = 0$.

6) ~~то~~ x_1 и x_2 — корни $Ax^2 + Bx + C = 0$; тогда $x_1 \leq x_2$ верно тогда и только тогда, когда

$-\frac{B - \sqrt{D}}{2A} \leq -\frac{B + \sqrt{D}}{2A} \mid -2A > 0 \Leftrightarrow -B - \sqrt{D} \leq -2B + 2\sqrt{D} \Leftrightarrow B \leq 3\sqrt{D} \Leftrightarrow B^2 \leq 9D$

7) $(3k - 9)^2 \leq 9(k - 19)^2 \Leftrightarrow (k - 3)^2 \leq (k - 19)^2 \Leftrightarrow (k - 3)^2 - (k - 19)^2 \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (k - 3 - k + 19)(k - 3 + k - 19) \leq 0 \Leftrightarrow 16(2k - 22) \leq 0 \Leftrightarrow k \leq 11$

8) П.к. ~~так как~~ при $k \leq 11$, $x_1 \leq x_2 \Rightarrow$ $P(\{x_1 \leq x_2\}) = \frac{13 - 11}{13 - 8} = \frac{2}{5} = 0,4$

k — цел. знач. ~~на промежутке~~ $[8; 13]$ $\Rightarrow$ (рис. 2) Лист 3 из 5

Ответ: 0,4

$\frac{11-8}{13-8} = \frac{3}{5} = 0,6$ (1R)

Бланк олимпиадной работы

Задание 2

Дано:

$\angle C = 90^\circ$

ABCD - квадрат

AB - хорда окружности

AB - хорда окружности

ABCD - квадрат

из т. C проведем 2 касат. к ω

∠ между касат. = 30°

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

R = ?

Решение:

1) Пусть N и M - точки касания касат. пров из т. C к ω

2) $\angle NAD = \angle E$;

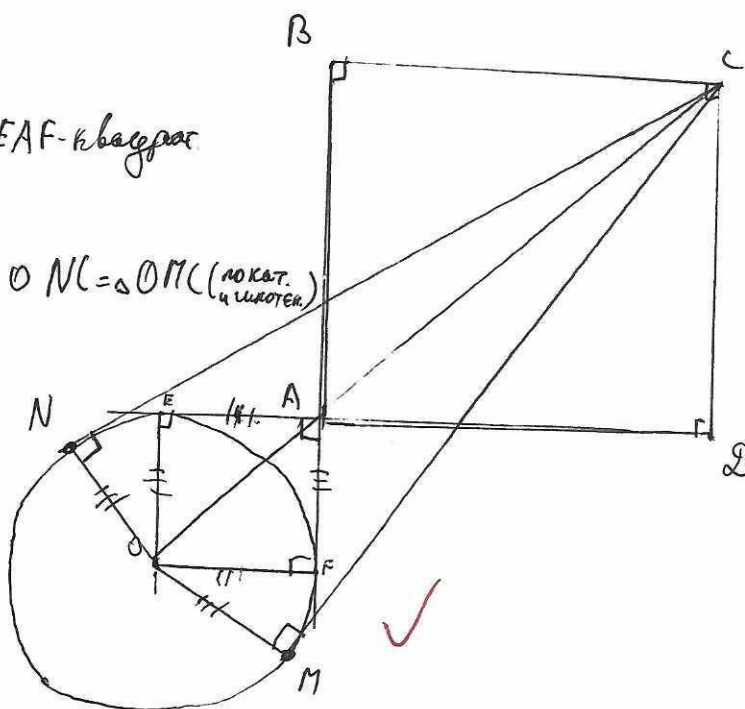
$\angle NAB = \angle F$

3) $\left. \begin{array}{l} \text{т.к. } OE \perp AE \\ OF \perp AF \\ AE \perp AF \end{array} \right\} \Rightarrow O E A F - \text{квадрат}$

4) $ON \perp NC$

$OM \perp MC$

$ON = OM = R$



5) т.к. AC - диаг. квадр. ABCD, то $\angle BCA = 45^\circ$

6) т.к. OA - диаг. квадр. O E A F, то $\angle OEA = 45^\circ$

7) $\left. \begin{array}{l} BC \parallel EA \\ \angle EAD = \angle BCA \\ AD \cap AC = A \end{array} \right\} \Rightarrow \text{т. A, O, C лежат на одной прямой}$

$$8) OC = AO + AC = R\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = R\sqrt{2} + 6 \quad R\sqrt{2} + 2\sqrt{6}$$

9) $\triangle NOC = \triangle OCM$, тогда $\angle NCO = \angle OCM$

$$10) \angle NCO + \angle OCM = 30^\circ \Rightarrow \angle OCM = 15^\circ$$

11) Обозначим R как x, тогда по теор. синусов для $\triangle OCM$:

$$\frac{OM}{\sin \angle OCM} = \frac{OC}{\sin \angle OMC}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\sin 15^\circ} = \frac{x\sqrt{2} + 6}{\sin 90^\circ} \Rightarrow \frac{x \cdot 2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1} = \frac{x\sqrt{2} + 6}{1} \Rightarrow x \cdot 2\sqrt{2} = (x\sqrt{2} + 6)(\sqrt{3}-1) \Rightarrow x \cdot 2\sqrt{2} - x(\sqrt{3}-1) = 6(\sqrt{3}-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\sin 15^\circ} = \frac{x\sqrt{2} + 6}{\sin 90^\circ} \Rightarrow \frac{x \cdot 2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1} = x\sqrt{2} + 6 \Rightarrow x \cdot 2\sqrt{2} = (x\sqrt{2} + 6)(\sqrt{3}-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot 2\sqrt{2} = x\sqrt{2}(\sqrt{3}-1) + 6(\sqrt{3}-1) \Rightarrow x(2\sqrt{2} - \sqrt{2}(\sqrt{3}-1)) = 6(\sqrt{3}-1) \Rightarrow x = \frac{6(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{2}(3-\sqrt{3})} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{3\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)} \Rightarrow x = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = 3\sqrt{2}$$

Ответ: $3\sqrt{2}$

6

Бланк олимпиадной работы

Задание 7

Решение:

1) Нетрудно заметить, что для того, чтобы расстояния от центра мозаики до радиусов были наименьшими, необходимо чтобы радиусы находились на окружности с центром в центре мозаики, ~~и~~ и концы в вершинах правильного 7-угольника вписанного в окружность

2) Пусть O — центр мозаики;

A и B — центры двух соседних радиусов

$\omega_1(A; r_1); \omega_2(B; r_2)$

$\omega_1 \cap \omega_2 = T$ и D — центр ω , тогда

$$\angle AOB = \frac{360}{7}$$

3) П.р. ~~радиус~~ радиус. Казура = 18, то $CD = 18$

4) $BC = BD = AC = AD = r_1$

5) Пусть H — серед. CD ; PH

6) т.к. $\triangle ACD, \triangle BCD \sim \triangle O$, то $BH \perp CD; AH \perp CD$

7) По теор. Пифагора для $\triangle BPH$: $BH = \sqrt{r_1^2 - 9^2} = \sqrt{1621 - 81} = 40$

8) очевидно, $AH = 40$

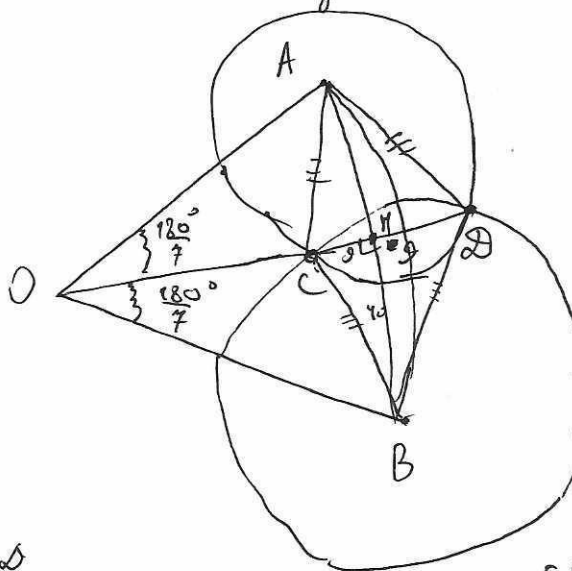
9) $S_{\text{пол}} = \pi r_1^2 \cdot \frac{7}{2} = \pi \cdot 18^2 \cdot \frac{7}{2} = \pi \cdot 1134$

Пусть $\angle AOB = \alpha = x$, тогда $S_{\text{пол}} = \pi(x + 18)^2 - \pi x^2 = 2\pi x \cdot 18 + \pi 18^2 = \pi 18(2x + 1)$

10) Очевидно, что $x = 2 \cdot 82 + 1 = 165$

$$S_{\text{пол}} = \pi \cdot 18(2 \cdot 82 + 1) = \pi \cdot 18(164 + 1) = \pi \cdot 18 \cdot 165 = 2970\pi$$

Ответ: 2970π



$$\begin{array}{r}
 59 \\
 \times 165 \\
 \hline
 18 \\
 1320 \\
 165 \\
 \hline
 2970
 \end{array}$$

(2)