



ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

ШИФР

104023

104023

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Бланк олимпиадной работы

Класс 10 Вариант 21 Дата Олимпиады 12.02.2023

Площадка написания МГУ им. Н. Э. Баумана

ОЦЕНКА

(заполняется проверяющим)

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	10	0	20	15	-					50	пятьдесят	



ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

ШИФР

1 0 4 0 2 3

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Бланк олимпиадной работы

$$S = \frac{a^{12} + 729^2}{729a^6} = \frac{a^{12} + 3^{12}}{3^6 a^6} = \frac{(a^4 + 3^4)(a^8 - a^4 3^4 + 3^8)}{3^6 a^6} \stackrel{\sim 1}{=} \frac{a^6}{3^6} + \frac{3^6}{a^6} = \left(\frac{a^2}{3} + \frac{3}{a^2}\right) \left(\frac{a^4}{3^4} - 1 + \frac{3^4}{a^4}\right)$$

$a \neq 0$

$$\frac{a}{3} - \frac{3}{a} = 2 \Rightarrow \frac{a^2 - 9}{3a} \Rightarrow a^2 - 6a - 9 = 0$$

$$D = 36 + 36 = (6\sqrt{2})^2$$

$$\begin{cases} a_1 = \frac{6 + 6\sqrt{2}}{2} = 3 + 3\sqrt{2} \Rightarrow \frac{a_1^2}{3} = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow \frac{a_1^4}{3^2} = 3 + 2\sqrt{2} \\ a_2 = 3 - 3\sqrt{2} \Rightarrow \frac{a_2^2}{3} = 1 - \sqrt{2} \Rightarrow \frac{a_2^4}{3^2} = 3 - 2\sqrt{2} \end{cases}$$

~~Пусть~~ $b = \frac{a^2}{3} \Rightarrow S = \left(b + \frac{1}{b}\right) \left(b^2 - 1 + \frac{1}{b^2}\right) = \frac{(b^2 + 1)(b^4 - b^2 + 1)}{b^3}$

$$b_1^2 = (3 + 2\sqrt{2})^2 = 17 + 12\sqrt{2} \Rightarrow b_1^3 = 51 + 36\sqrt{2} + 34\sqrt{2} + 48 = 99 + 70\sqrt{2}$$

$$b_2^2 = (3 - 2\sqrt{2})^2 = 17 - 12\sqrt{2} \Rightarrow b_2^3 = 99 - 70\sqrt{2}$$

$$\begin{array}{r} \times 24 \\ 17 \\ + 168 \\ \hline 408 \end{array} \quad \begin{array}{r} \times 99 \\ 33 \\ + 297 \\ \hline 3267 \end{array}$$

$$b_1^4 = (17 + 12\sqrt{2})^2 = 289 + 24 \cdot 17\sqrt{2} + 288 = 577 + 408\sqrt{2}$$

$$b_2^4 = 577 - 408\sqrt{2}$$

$$S_1 = \frac{(17 + 12\sqrt{2})(577 + 408\sqrt{2} - 17 + 12\sqrt{2} + 1)}{99 + 70\sqrt{2}} = \frac{6(3 + 2\sqrt{2})(561 + 396\sqrt{2})}{99 + 70\sqrt{2}}$$

$$= \frac{6(3 + 2\sqrt{2})(561 + 396\sqrt{2})}{99 + 70\sqrt{2}} = \frac{6(1683 + (1122 + 1188)\sqrt{2} + 1584)}{99 + 70\sqrt{2}} = \frac{6(3267 + 2310\sqrt{2})}{99 + 70\sqrt{2}} = 6 \cdot 33 = 198$$

$$S_2 = \frac{(17 - 12\sqrt{2})(577 - 408\sqrt{2} - 17 + 12\sqrt{2} + 1)}{99 - 70\sqrt{2}} = \frac{6(3 - 2\sqrt{2})(561 - 396\sqrt{2})}{99 - 70\sqrt{2}}$$

$$= \frac{6(3267 - 2310\sqrt{2})}{99 - 70\sqrt{2}} = 6 \cdot 33 = 198 = S_1 = S$$

Ответ: $S = 198$ + 5



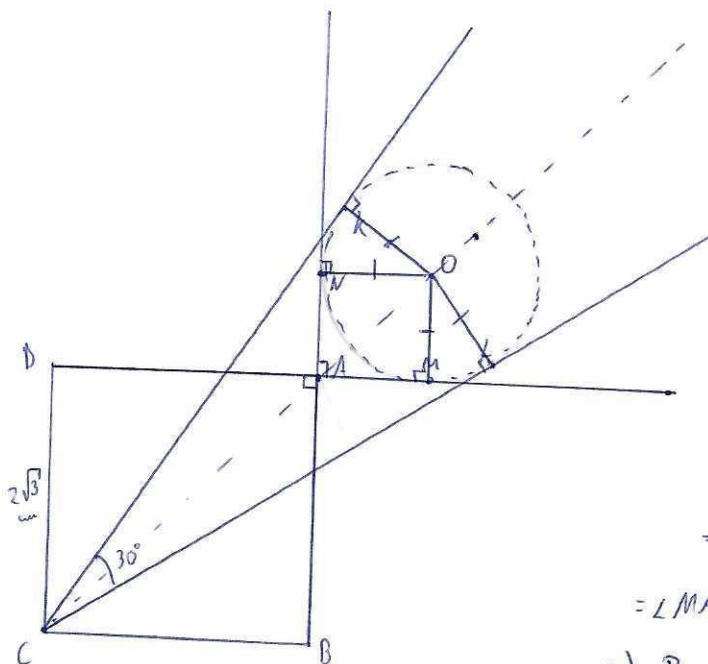
$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Бланк олимпиадной работы

Дано: $ABCD$ - квадрат; AM и AN - кас. к окр. O ; CK, CL - кас.; $AB = 2\sqrt{3}$ см; $\angle LCK = 30^\circ$; $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$
Найти: R



1) Рассмотрим $\triangle COK$ и $\triangle COL$, у них:
 $\angle OLC = \angle OKC = 90^\circ$ (CK, CL - кас.), OC - общ.,
 $OK = OL = R$ (CK, CL - кас.) $\Rightarrow$ они равны $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle LCO = \angle KCO = \angle LCK = 15^\circ$
 $\Rightarrow \angle LCO = \angle KCO = \frac{\angle LCK}{2} = 15^\circ$

2) Рассмотрим четырехугольник $ANOM$, у него:
 $\angle ONA = \angle OMA = 90^\circ$ (AM, AN - кас.),
 $\angle MAN = \angle BAD$ (верт., $AM \in AD, AN \in AB$) $\Rightarrow \angle MAN = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle MON = 360^\circ - \angle ONA - \angle OMA - \angle MAN = 90^\circ = \angle ONA = \angle OMA = \angle MAN \Rightarrow ANOM$ - прямоугольник $\Rightarrow AN = OM, AM = ON$

3) Рассмотрим $\square ANOM$, у него

$ON = OM = R$ (AM, AN - кас.) $\Rightarrow AN = OM = ON = AM = R \Rightarrow ANOM$ - квадрат

4) Рассмотрим $\triangle AMO$, у него: $\angle OMA = 90^\circ$, $AM = OM = R \Rightarrow$ р/б, прм $\Rightarrow \angle MAO = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ$ (AM - кас.)

5) По т. Пифагора: $AO = \sqrt{AM^2 + OM^2} = R\sqrt{2}$

6) Рассмотрим $\triangle ABC$, у него: $\angle B = 90^\circ$ ($ABCD$ - квадрат), $AB = BC$ ($ABCD$ - квадрат) $\Rightarrow$ р/б, прм $\Rightarrow \angle BCA = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ$

7) По т. Пифагора: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2\sqrt{3}$ см

8) $ABCD$ - квадрат $\Rightarrow AD \parallel BC$

9) $\angle MAO = 45^\circ$

$\angle BCA = 45^\circ$

$AD \parallel BC$ ($AD \parallel BC$)
 $M \in AD$

$AC \parallel AO$

$A \in AC$
 $A \in AO$

$AO \subset AC \Rightarrow O \in AC \Rightarrow CO = AC + AO = (2\sqrt{3} \text{ см} + R)\sqrt{2}$

10) Рассмотрим $\triangle LCO$: $\angle OLC = 90^\circ$ (CL - кас.) $\Rightarrow$ окр. прм. $\Rightarrow \sin \angle LCO = \frac{OL}{OC} = \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} =$
 $= \frac{R}{OC} = \frac{R}{(2\sqrt{3}+R)\sqrt{2}} \Rightarrow (\sqrt{3}-1)(2\sqrt{3}+R)\sqrt{2} = 2\sqrt{2}R = 6\sqrt{2} + R\sqrt{2} - 2\sqrt{2} - R\sqrt{2} \Rightarrow R(3\sqrt{2}-\sqrt{6}) = 2\sqrt{2}(3-\sqrt{3}) =$
 $= R\sqrt{2}(3-\sqrt{3}) \Rightarrow R = 2 \text{ см}$

Ответ: $R = 2 \text{ см}$

Бланк олимпиадной работы

№ 3.

$$\begin{cases} x^2 - 22y - 69z + 703 = 0 & (1) \\ y^2 + 23x + 23z - 1473 = 0 & (2) \\ z^2 - 63x + 66y + 2183 = 0 & (3) \end{cases}$$

~~(1)-(2): $x^2 - y^2 - 22y - 23x - 92z + 2176 = 0$~~

(1)-(2): $x^2 - y^2 - 22y - 23x - 92z + 2176 = 0$

(1)-(2): $z^2 - 63x + 66y + 2183 - x^2 + y^2 + 22y + 23x + 92z + 7 = 0$
 $z^2 + 92z - 40x + 88y - x^2 + y^2 - 7 = 0$

3*(2)+(1): $3y^2 + 69x + 69z - 4419 + x^2 - 22y - 69z + 703 = 0$

$3y^2 - 22y + x^2 + 69x - 3716 = 0$

$3716 = 4 \cdot 929$

$D = 484 - 12(x^2 + 69x - 3716) = (-12x^2 + 12 \cdot 69x - 3716 \cdot 12 - 484) = -(12x^2 + 828x - 45076) =$

$= -4(3x^2 + 207x - 11269)$

$D' = 207^2 + 12 \cdot 11269 = (200+7)^2 + 12 \cdot 11269 = 41449 + 135228 = 176677$

$\sqrt{176677} = 420,32, \dots$

$$\begin{array}{r} 84k \\ k \end{array} \overline{) 166} \\ \underline{164} \\ 277 \\ \underline{270} \\ 700 \\ \underline{700} \\ 000 \\ \underline{000} \\ 000 \\ \underline{000} \\ 000 \end{array}$$

3*(1)+(3): $3x^2 - 66y - 207z + 2109 + z^2 - 63x + 66y + 2183 = 0$

$z^2 - 207z + 3x^2 - 63x + 4292 = 0$

(1): $D = 4(22y + 69z - 703)$

$x = \pm \sqrt{22y + 69z - 703}$

(2): $y = \pm \sqrt{1473 - 23x - 23z}$

(3): $z = \pm \sqrt{63x - 66y - 2183}$

Бланк олимпиадной работы

№

$$k \in [8; 13]$$

$$(k^2 - 2k - 35)x^2 + (3k - 9)x + 2 = 0$$

$$x_1 \leq 2x_2$$

$$D = 9(k-3)^2 - 8(k^2 - 2k - 35) = 9k^2 - 54k + 81 - 8k^2 + 16k + 280 = k^2 - 38k + 361 = (k-19)^2$$

$$a) \text{ Пусть } x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$$

$$k < 19 \Rightarrow \sqrt{(k-19)^2} = 19 - k$$

$$x_{1a} = \frac{9-3k+19-k}{2(k^2-2k-35)} = \frac{28-4k}{2(k-7)(k+5)} = \frac{2(7-k)}{(k-7)(k+5)} = -\frac{2}{k+5}$$

$$x_{2a} = \frac{9-3k-19+k}{2(k-7)(k+5)} = \frac{-2(k+5)}{2(k-7)(k+5)} = -\frac{1}{k-7} \Rightarrow 2x_{2a} = -\frac{2}{k-7}$$

~~так как~~

$$k > -5 \Rightarrow k+5 > 0$$

$$k > 7 \Rightarrow k-7 > 0$$

$$-\frac{2}{k+5} \vee -\frac{2}{k-7} \quad | : (-2)$$

знак не меняется

$$\frac{1}{k+5} \vee \frac{1}{k-7}$$

$$k-7 \vee k+5$$

$$-7 < 5 \Rightarrow x_1 > 2x_2 \Rightarrow 0\%$$

~~Problem.~~ 0% , если $x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$, а $x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \Rightarrow 100\%$, если наоборот

б) Пусть $x_{1b} = x_{2a}$, $x_{2b} = x_{1a}$

$$x_{1b} = -\frac{1}{k-7}$$

$$x_{2b} = -\frac{2}{k+5} \Rightarrow 2x_{2b} = -\frac{4}{k+5}$$

$$-\frac{1}{k-7} \triangleq -\frac{4}{k+5} \quad | : (-1)$$

знак не меняется

$$k+5 \vee 4(k-7)$$

$$33 \vee 3k$$

$$11 \triangleright k$$



$$k \geq 11 \Rightarrow \checkmark \quad \text{иначе} = \frac{40\%}{2 \cdot \infty} \approx 40\%$$

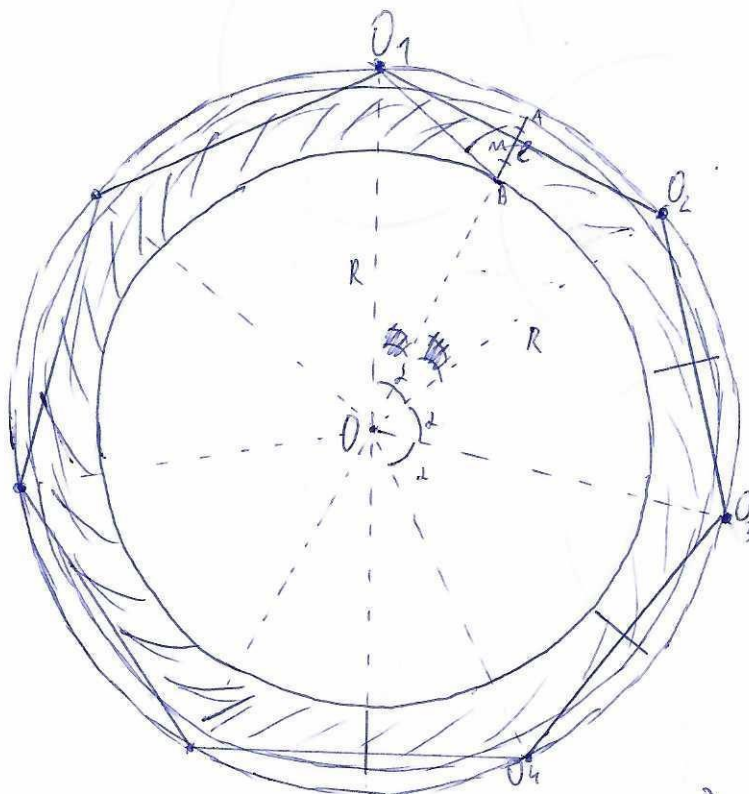
$$k < 11 \Rightarrow \emptyset \quad \text{иначе} = 60\% - \frac{1}{2 \cdot \infty} \approx 60\%$$

Problem: а) $x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \Rightarrow 0\%$

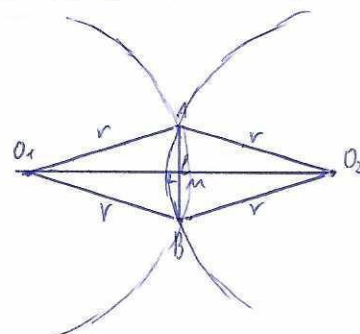
б) $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \Rightarrow \underline{40\%}$

15

Бланк олимпиадной работы



$\ell = 18 \text{ км}$
 1) Рассм. две окружности, перес. одной прямой длиной ℓ (перпенд. осей. Т. перес.):



2) $O_1A = O_2A = O_1B = O_2B = r \Rightarrow$

$\Rightarrow O_1AO_2B$ - ромб $\Rightarrow O_1O_2 \perp AB$, M

$O_1O_2 \cap AB = M, \frac{AB}{2} = AM = BM, O_1M = O_2M = \frac{O_1O_2}{2}$

3) Рассм. $\triangle O_1AM$:

$O_1O_2 \perp AB \Rightarrow \angle AMO_1 = 90^\circ \Rightarrow \text{ок. - прям.} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ по т. Пифагора: $O_1A^2 = AM^2 + O_1M^2 = r^2 =$

$= \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + O_1M^2 \Rightarrow O_1M = \sqrt{41^2 - \left(\frac{18}{2}\right)^2} = \sqrt{1681 - 81} = 40 \text{ км}$

$\Rightarrow O_1O_2 = 80 \text{ км} \Rightarrow$ расстояние между центрами соседних окруж. равно 80 км

4) $\alpha = \frac{360^\circ}{7}$

5) Рассм. $\triangle OO_1O_2$: $OO_1 = OO_2 = R \Rightarrow \text{ок. - равн.} \Rightarrow \angle OO_1O_2 = \angle OO_2O_1 = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ \left(1 - \frac{1}{7}\right) = \frac{630^\circ}{7}$

6) $O_1M = O_2M \Rightarrow OM$ - мед. $\triangle OO_1O_2$ - равн. $\Rightarrow OM$ - вис., бис., мед. $\Rightarrow \angle OMO_1 = 90^\circ, \angle O_1OM = \frac{\alpha}{2} = \frac{180^\circ}{7} \Rightarrow \triangle OMO_1$ - прям. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sin \angle O_1OM = \frac{O_1M}{R} = \frac{40}{R} = \sin\left(\frac{180^\circ}{7}\right) \Rightarrow R = \frac{40}{\sin\left(\frac{180^\circ}{7}\right)} \text{ км}$

7) По т. Пифагора: $OM^2 + O_1M^2 = OO_1^2 \Rightarrow OM = \sqrt{OO_1^2 - O_1M^2} = \sqrt{R^2 - 40^2} = 40 \sqrt{\frac{1}{\sin^2\left(\frac{180^\circ}{7}\right)} - 1} \text{ км}$

8) $AB \perp O_1O_2 \Rightarrow \angle O_1MB = 90^\circ \Rightarrow B \in OM \Rightarrow OB = OM - \frac{AB}{2} = \left(40 \sqrt{\frac{1}{\sin^2\left(\frac{180^\circ}{7}\right)} - 1} - 9\right) \text{ км} \Rightarrow OA = OM + 9 \text{ км} =$
 $= \left(40 \sqrt{\frac{1}{\sin^2\left(\frac{180^\circ}{7}\right)} - 1} + 9\right) \text{ км}$

9) $S_1 = \pi \cdot OB^2$

10) $S_2 = \pi \cdot OA^2$

11) $S = S_2 - S_1 = \pi \cdot \left((OM + 9)^2 - (OM - 9)^2\right) = \pi \cdot (18 \cdot 2OM) = 36\pi \cdot OM =$

$= 1440\pi \cdot \sqrt{\frac{1}{\sin^2\left(\frac{180^\circ}{7}\right)} - 1} \text{ (км}^2\text{)}$

(20)