



ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР

1 0 9 5 4 8

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Бланк олимпиадной работы

Класс 10 Вариант 21 Дата Олимпиады 12.02.2023

Площадка написания МГТУ им. Н.Э. Баумана, г. Москва, ул 2-ая Бауманская, 5.

ОЦЕНКА

(заполняется проверяющим)

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	10	15	20	20	0					70	семидесять	<i>[Signature]</i>

Задача 3

$$\begin{cases} x^2 - 22y - 69z + 403 = 0 \\ y^2 + 23x + 23z - 1473 = 0 \\ z^2 - 63x + 66y + 2183 = 0 \end{cases}$$

Сложим все ур-ия вместе:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 22y - 69z + 23x + 23z - 63x + 66y + 2183 - 1473 + 403 = 0$$

$$x^2 - 40x + y^2 + 44y + z^2 - 46z + 1413 = 0$$

$$x^2 - 40x + 400 - 400 + y^2 + 44y + 22^2 - 22^2 + z^2 - 46z + 23^2 - 23^2 + 1413 = 0$$

$$(x-20)^2 + (y+22)^2 + (z-23)^2 + 1413 - 400 - 484 - 529 = 0$$

$$(x-20)^2 + (y+22)^2 + (z-23)^2 = 0$$

Это выполняется, если все квадраты равны 0 $\Rightarrow$

$$\Rightarrow x=20; y=-22; z=23$$

Ответ: $x=20; y=-22; z=23$.

15

Бланк олимпиадной работы

Задание 1

Преобразуем

$$1) \frac{a^{12} + 429^2}{429a^6} = \frac{a^6}{429} + \frac{429}{a^6} = \left(\frac{a}{3}\right)^6 + \left(\frac{3}{a}\right)^6.$$

$$2) \text{ По } \frac{a}{3} - \frac{3}{a} = 2.$$

а) возведем в квадрат

$$\left(\frac{a}{3} - \frac{3}{a}\right)^2 = 4$$

$$\left|\frac{a^2}{9} - 2 \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{3}{a} + \frac{9}{a^2}\right| = 4$$

$$\frac{a^2}{9} + \frac{9}{a^2} = 6.$$

б) возведем в квадрат

$$\left(\frac{a^2}{9} + \frac{9}{a^2}\right)^2 = 36.$$

$$\frac{a^4}{81} + 2 \cdot \frac{a^2}{9} \cdot \frac{9}{a^2} + \frac{81}{a^4} = 36.$$

$$\frac{a^4}{81} + \frac{81}{a^4} = 34$$

в) домножим $\frac{a^2}{9} + \frac{9}{a^2}$

$$\left(\frac{a^4}{81} + \frac{81}{a^4}\right) \left(\frac{a^2}{9} + \frac{9}{a^2}\right) = 34 \cdot 6$$

$$\frac{a^6}{429} + \frac{9}{a^2} + \frac{a^2}{9} + \frac{429}{a^6} = 204$$

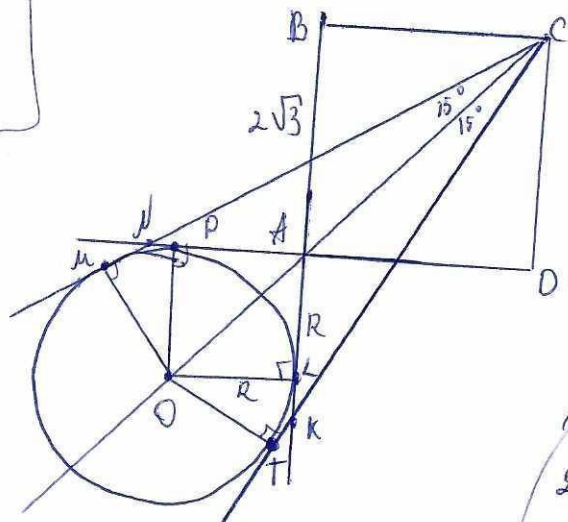
$$\frac{a^6}{429} + \frac{429}{a^6} = 198.$$

Ответ: $\frac{a^{12} + 429^{12}}{429a^6} = 198.$

5

биссектор 2-мет

$R = ?$



Пот-к СМ и СТ касательные,
то отрезок СО будет диагональ.
причем этот отрезок будет
являться и диагональю
квадрата, т.к. и $\angle T-A$ также
проведены 2 касательные к окруж-
ности $\Rightarrow$

$\Rightarrow A \in O$ также является LPA .

2) Проведен OM и OT - ~~лучи~~ ^{радиусы}.
 К касательным. Эти OM и OT
 радиусы являются перпен. к
 касательным.

3) Провели также ОЛ и ОР, радиусы к касательным. Они также являются перпен.

П.к АО диаметр $\angle PAZ$, то эти углы по 45° $\Rightarrow$ если мы проведем AC , она должна совпасть с AO , чтобы выполнялось равен-во углов:
 $\angle BAC = \angle OAZ$; $\angle CAD = \angle PAO$;

4) $\angle BAE = \angle OAL = 45^\circ \Rightarrow$
 $\Rightarrow \triangle AOL - \text{right} \Rightarrow AL = OL = R.$

5) $OA = \sqrt{R^2 + R^2} = \sqrt{2} R$

6) $AC = \sqrt{12+12} = 2\sqrt{6}$

7) U_3 1-ка сотов:

$$\sin 15^\circ = \frac{OI}{OC} = \frac{R}{OA+AC} = \frac{R}{\sqrt{2}R + 2\sqrt{6}}$$

$$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{R}{\sqrt{2}(R+2\sqrt{3})}$$

$$\frac{\sqrt{3}-1}{2} = \frac{R}{R+2\sqrt{3}} \Rightarrow (\sqrt{3}-1)(R+2\sqrt{3}) = 2R$$

$$\sqrt{3}R - R + 6 - 2\sqrt{3} = 2R$$

$$2(3-\sqrt{3}) = 3R - \sqrt{3}R$$

$$2(3-\sqrt{3}) = R(3-\sqrt{3})$$

$$R=2$$

Ответ: $R=2$



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР

109548

0123456789

Бланк олимпиадной работы

Задача 5

Дано:

$$k \in [8; 13]$$

$$n = ?$$

$$(k^2 - 2k - 35)x^2 + (3k - 9)x + 2 = 0$$

$$D = (3k - 9)^2 - 8(k^2 - 2k - 35) \geq 0$$

чтобы было
2 корня

$$9k^2 - 54k + 81 - 8k^2 + 16k + 280 \geq 0$$

$$k^2 - 38k + 361 \geq 0$$

$$k^2 - 38k + 361 \geq 0$$

$$(k - 19)^2 \geq 0$$

выполняется всегда, кроме $k = 19$, но по условию $k \neq 19$.

$$x = \frac{-(3k - 9) \pm \sqrt{(19 - k)^2}}{2(k^2 - 2k - 35)} = \frac{9 - 3k \pm |19 - k|}{2(k + 5)(k - 7)}$$

$$= \frac{9 - 3k \pm (19 - k)}{2(k + 5)(k - 7)} = \begin{cases} \frac{9 - 3k + 19 - k}{2(k + 5)(k - 7)} = \frac{28 - 4k}{2(k + 5)(k - 7)} \\ \frac{9 - 3k - 19 + k}{2(k + 5)(k - 7)} = \frac{-10 - 2k}{2(k + 5)(k - 7)} \end{cases}$$

Система:

$$\frac{14 - 2k}{(k + 5)(k - 7)} \leq \frac{-10 - 2k}{(k + 5)(k - 7)}$$

$$\frac{-5 - k}{(k + 5)(k - 7)} \leq \frac{28 - 4k}{(k + 5)(k - 7)}$$

$$k \in [8; 13]$$

$$1) \frac{14 - 2k + 10 + 2k}{(k + 5)(k - 7)} \leq 0$$

$$\frac{24}{(k + 5)(k - 7)} \leq 0$$



не
подходит
 $\forall k \in [8; 13]$

$$2) \frac{-5 - k - 28 + 4k}{(k + 5)(k - 7)} \leq 0$$

$$\frac{3k - 33}{(k + 5)(k - 7)} \leq 0$$

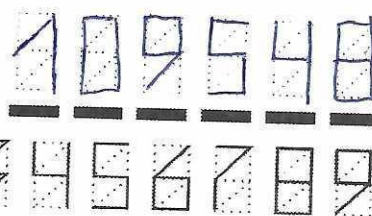
$$\frac{3(k - 11)}{(k + 5)(k - 7)} \leq 0$$

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$

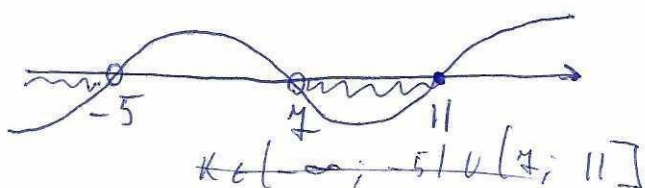


ШИФР



Бланк олимпиадной работы
№ 5 (продолжение)

$$\frac{3(k-11)}{(k+5)(k-4)} \leq 0$$



Но учитывая $\begin{cases} k \in (-\infty; -5) \cup (4; 11] \\ k \in [8; 13] \end{cases} \Rightarrow k \in [8; 11]$

Чтобы найти вероятность, надо найти отношение отрезков.

$$\Rightarrow n = \frac{11-8}{13-8} = \frac{3}{5} = 0,6.$$

Ответ: $n = 0,6$. + (20)

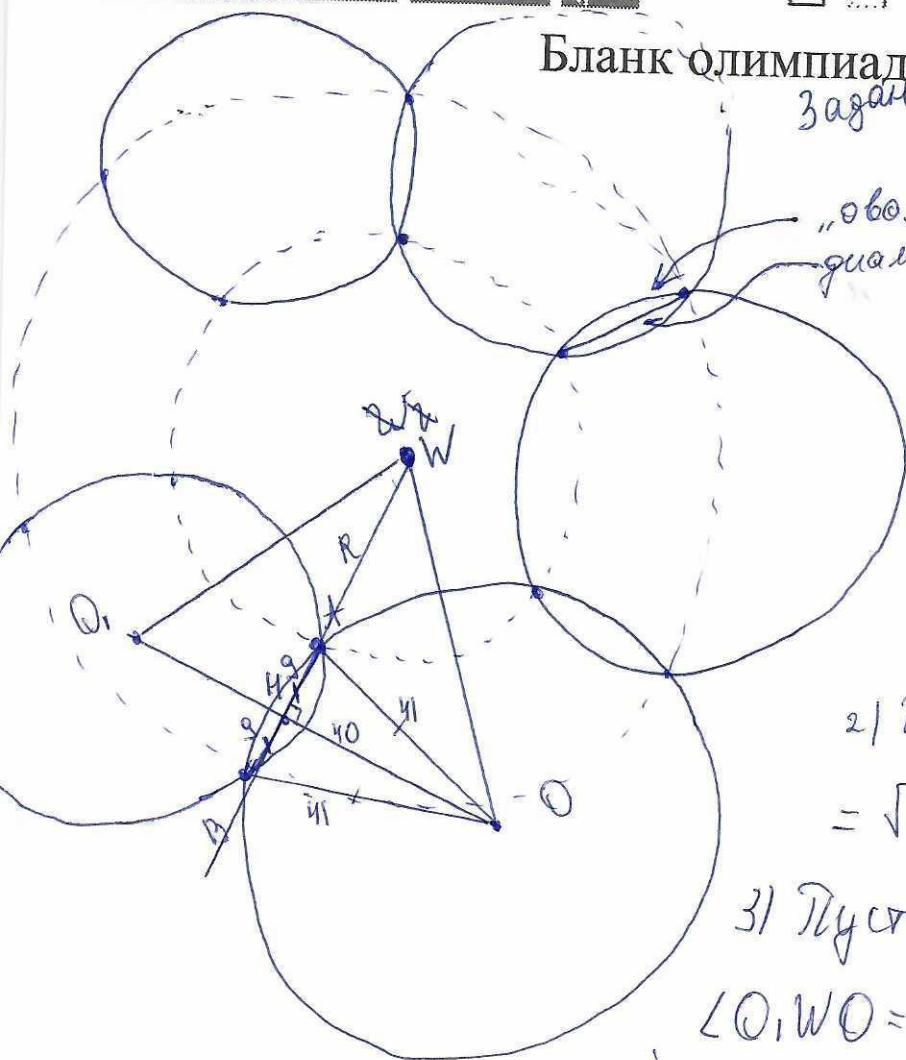
Задание 4

Для того, чтобы расстояние от материки было минимальным, нужно, чтобы окружности, накладывая друг на друга, создавали "овал" с диаметром 18.
Рисунок: см. след. лист

Бланк олимпиадной работы

Задача 4 (продолжение)

Одинаковые кольца.



Известный факт, что если мы проведем OO_1 , то в $\triangle KOBO_1$ OH - будет диаметр $\Rightarrow$ и высотой и медианой, $\triangle KOBO_1$ - $rt \triangle \Rightarrow \angle AHO = 90^\circ$; $AM = MB = 9$.

$$2) \text{ Найдем } OH = \sqrt{AO^2 - AM^2} = \sqrt{1681 - 81} = 40$$

3) Пусть $AW = R$. (просто обозначение)

$$\angle O_1WO = \frac{360}{7} \text{ (т.к. 7 окружностей)} \Rightarrow$$

4) Тогда $\angle AWO$ в $\triangle KOBO_1$ $\Rightarrow \angle AWO = \frac{1}{2} \angle O_1WO$ (по симметрии) (одинаковые окружности).

$$\Rightarrow \angle AWO = \frac{180}{7} \approx 26^\circ \text{ (для удобства).}$$

$$\angle 26^\circ = \frac{OH}{HW} = \frac{40}{R+9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle 26^\circ R + 9 \angle 26^\circ = 40 \Rightarrow R = \frac{40 - 9 \angle 26^\circ}{\angle 26^\circ} = \frac{40}{\angle 26^\circ} - 9$$

5) Тогда S искомого кольца равна:

$$S = \pi(R+18)^2 - \pi R^2 = \pi(2R \cdot 18 + 18^2) = 18\pi \left(\frac{40}{\angle 26^\circ} - 9 + 18 \right) = \frac{18 \cdot 80 \pi}{\angle 26^\circ} = \frac{1440 \pi}{\angle 26^\circ}$$

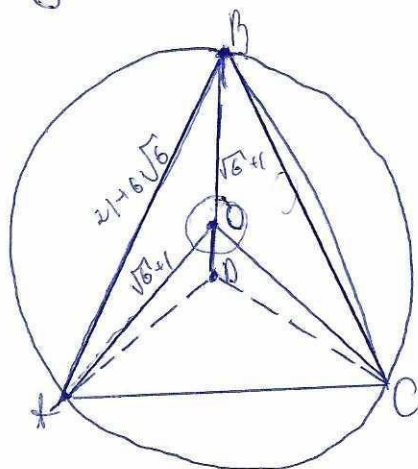
$$\text{Ответ: } S = \frac{1440 \pi}{\angle 26^\circ} \text{ км}^2$$

20.

Бланк олимпиадной работы

Задание 6.

Первое, что надо отметить, что пирамида правильная и центр пирамиды будет находиться в ~~той же~~ ^{центре} ~~находящаяся~~ ^{находящаяся} ~~мысли~~ ^{вписанная} в центр пирамиды шара, это следует из правильности пирамиды.



$$\angle AOB = 120^\circ$$

По т. косинусов найдем AB:

$$AB^2 = AO^2 + OB^2 - 2 \cos 120^\circ AO \cdot OB =$$

$$= AO^2 + OB^2 + 2 \cdot 2 \cdot AO \cdot OB =$$

$$= 3AO^2 = 3(\sqrt{6} + 1)^2 = 3(6 + 2\sqrt{6} + 1) =$$

$$= 27 + 6\sqrt{6} \Rightarrow \Rightarrow AB = AO\sqrt{3} = \sqrt{6} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{3} = 3\sqrt{2} + \sqrt{3}$$

$\Rightarrow$ Найдем радиус шара, который вписан в пирамиду.

$$BR = 21 + 6\sqrt{6}$$

$$R = \frac{21}{6} + \sqrt{6} = \frac{7}{2} + \sqrt{6} = 3.5 + \sqrt{6}$$

$$6R = 3\sqrt{2} + \sqrt{3}$$

$$R = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{3}}{6}$$

6