

Бланк олимпиадной работы

$$r = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{\sqrt{2}} - \frac{5-\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}}{1 - \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2}} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2 \cdot (2\sqrt{5-\sqrt{5}} - 5 + \sqrt{5})}{2\sqrt{2} \cdot (2 - \sqrt{5-\sqrt{5}})} \right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \left(\frac{(2 - \sqrt{5-\sqrt{5}})\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2 - \sqrt{5-\sqrt{5}}} \right) = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4} \quad \checkmark \text{ Ответ.}$$

$$\begin{cases} x^2 - 23y + 66z + 612 = 0 & (1) \\ y^2 + 62x - 20z + 296 = 0 & (2) \\ z^2 - 22x + 67y + 505 = 0 & (3) \end{cases}$$

(1) + (2) + (3):

$$x^2 + y^2 + z^2 + 62x - 22x + 67y - 23y + 66z - 20z + 612 + 296 + 505 = 0$$

$$x^2 + 40x + 400 - 400 + y^2 + 44y + 484 - 484 + z^2 + 46z + 529 - 529 = -612 - 296 - 505$$

$$(x+20)^2 + (y+22)^2 + (z+23)^2 = 400 + 484 + 529 - 612 - 296 - 505$$

$$(x+20)^2 + (y+22)^2 + (z+23)^2 = 0.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (x+20)^2 &= 0 & x &= -20 \\ (y+22)^2 &= 0 & y &= -22 \\ (z+23)^2 &= 0 & z &= -23. \end{aligned}$$

Отв.: $x = -20$
 $y = -22$
 $z = -23.$

(+) задача
 решена
 верно.

н5. $k \in [3, 8]$

$x_1, x_2: (k^2 - 2k - 3)x^2 + (3k - 5)x + 1 = 0; x_1 \leq x_2$
 $k - ? \text{ вер.} = ?$

$$D = (3k - 5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (k^2 - 2k - 3) = 9k^2 - 30k + 25 - 8(k^2 - 2k - 3) =$$

$$= 9k^2 - 8k^2 - 30k + 16k + 25 + 24 = k^2 - 14k + 49 = (k - 7)^2$$

$$x_{1,2} = x_{\pm} = \frac{-3k + 5 \pm |k - 7|}{k^2 - 4k - 6} = \frac{-3k + 5 \pm (k - 7)}{2k^2 - 4k + 6}$$

$$\text{Таким образом } x_1 = \frac{-3k + 5 + k - 7}{2k^2 - 4k + 6} = \frac{-2k - 2}{2(k^2 - 2k - 3)} = \frac{-k - 1}{k^2 - 2k - 3} = \frac{-(k+1)}{(k-3)(k+1)} = -\frac{1}{k-3}$$

$$x_2 = \frac{-3k + 5 - k + 7}{2(k^2 - 2k - 3)} = \frac{2(-2k + 6)}{2(k-3)(k+1)} = \frac{-2(k-3)}{(k-3)(k+1)} = -\frac{2}{k+1}$$



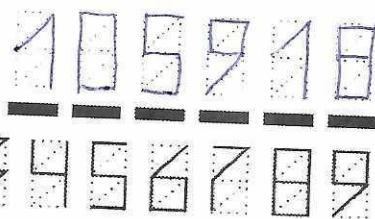
ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР



Бланк олимпиадной работы

$$x_1 \leq 2x_2$$

$$\frac{1}{3-k} \leq -\frac{4}{k+1}$$

$$\frac{1}{3-k} + \frac{4}{k+1} \leq 0$$

$$k \neq 3, k \neq -1$$

$$\frac{k+1+12-4k}{(3-k)(k+1)} \leq 0$$

$$\frac{-3k+13}{(3-k)(k+1)} \leq 0$$

$$\begin{array}{c} -1 \quad + \quad 3 \quad - \quad \frac{13}{3} \quad + \\ \hline \Rightarrow k \in (-\infty; -1) \cup (3; \frac{13}{3}) \end{array}$$

$$\Rightarrow k = 4$$

$$2) \text{ так как } x_1 = -\frac{2}{k+1}$$

$$x_2 = \frac{1}{3-k}$$

$$-\frac{2}{k+1} \leq \frac{2}{3-k}$$

$$\frac{2}{3-k} + \frac{2}{k+1} \geq 0$$

$$\frac{2k+2+6-4k}{(3-k)(k+1)} \geq 0$$

$$\frac{8}{(3-k)(k+1)} \geq 0$$

$$\begin{array}{c} -1 \quad + \quad 3 \quad - \\ \hline k \in (-1; 3) \Rightarrow \emptyset \end{array}$$

$\Rightarrow k$ и.б. больше 4.

$$\Rightarrow \text{Вероятно } k = \frac{1}{8-3+1} = \frac{1}{6}$$

$$\text{Отв.: } \frac{1}{6}$$

16 баллов

(+)

неверное предполо-
жение, что $k \in \mathbb{Z}$.

Бланк олимпиадной работы

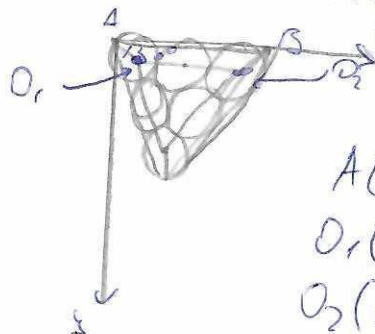
№ 6.

Дано:
 $r_1, r_2 = 5.5r + 5$
 $10[5, 10]r_1 = r$
 $P = ?$
 R

Затонированные или незатонированные шары;
 3 затонированных шаров, на нижнем уровне шаров в форме треугольника (рис.), на ср.- уровне шаров в форме Δ (рис.) и на

верхнем 1 шар.

Окр., отн. диаметр шаров r_1, r_2 , пос. 4 шаров: верх. шар и 3 шаров на нижн. уровне. Мы можем представить из этих 4 шаров тетраэдр. Его сторона будет иметь длину $L = 4r$.



Мы можем найти $|AB|$ методом координат.

$A(0, 0)$
 $O_1(r\sqrt{3}, \frac{r}{2})$
 $O_2(r\sqrt{3} + 4r; \frac{r}{2}) \Rightarrow |AB| = 2r\sqrt{3} + 4r = r(4 + 2\sqrt{3})$
 $B(2r\sqrt{3} + 4r; 0)$

Тетраэдр бьит в сторону $\Rightarrow r_{\text{сф}} = \frac{2}{3} h_T$. $r_{\text{сф}} = \frac{3}{4} h_T$.

$h_T = \sqrt{L^2 - (\frac{2}{3}L)^2}$

$h = \sqrt{L^2 - (\frac{L}{2})^2} = \frac{L\sqrt{3}}{2}$
 $h_T = \sqrt{L^2 - \frac{4}{9}L^2} = \frac{3}{4}L = \frac{3}{4} \cdot \frac{L\sqrt{3}}{2} = \frac{L\sqrt{6}}{4}$

$\Rightarrow r_{\text{сф}} = \frac{L\sqrt{6}}{4} = 5(\sqrt{2} + 1)$

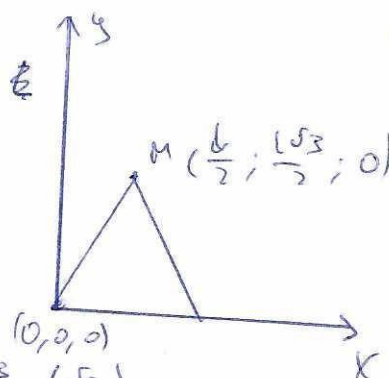
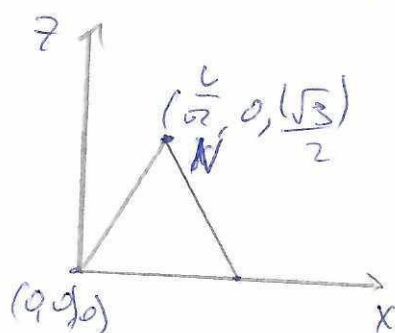
$\frac{r(4 + 2\sqrt{3}) \cdot \sqrt{6}}{4} = 5(\sqrt{2} + 1)$

$r = \frac{20(\sqrt{2} + 1)}{\sqrt{6}(4 + 2\sqrt{3})} = \frac{20(\sqrt{2} + 1)}{4\sqrt{6} + 6\sqrt{2}} = \frac{20(\sqrt{2} + 1)}{2\sqrt{2}(2\sqrt{3} + 3)}$

$\nwarrow$ r каждого шарика

Бланк олимпиадной работы

Пусть шарик, висит в центре пирамиды, им. радиусе R.
 6 внутр. раскрыв своим центрами образуют ~~октаэдр~~^{равношор. фигуру} с ребром
 $\pm 2r$. Тогда ~~масса~~^{Опт. отноше} ~~внут.~~^{наша} ~~фигуры~~^{фигуры} сферы будет
 им. радиусе = $r + R$. Найдем еще при помощи метода поворота.
 = ~~новое~~^{оптимальное} значение



$$\rightarrow \vec{MN} (0, -\frac{(\sqrt{3})}{2}, \frac{(\sqrt{3})}{2}) \in \pi$$

$$\frac{d}{2} = \frac{\sqrt{\frac{L^2 - 3}{2} + \frac{L^2 - 3}{2}}}{2} = \frac{\sqrt{53}}{2} = 1.4R$$

$$R = r\sqrt{3} - r = r(\sqrt{3} - 1) = \frac{20(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{3} - 1)}{2\sqrt{2}(\sqrt{3} + 3)}$$

+

30 бакалов