

Бланк олимпиадной работы

Класс 10 Вариант 2 Дата Олимпиады 12.02.23

Площадка написания МТМ У им. Фаулера

ОЦЕНКА

(заполняется проверяющим)

(заполняется проверяющим)													
Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	10	0	20	20	0	XXXXX				55	пятьдесят пять баллов	81-

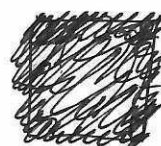
N1

$$\frac{a^{12} + 4096}{64a^6} = \frac{a^6}{64} + \frac{64}{a^6} = \left(\frac{a}{2}\right)^6 + \left(\frac{2}{a}\right)^6$$

$$\left(\frac{a}{2} - \frac{2}{a}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{2}{a}\right) + \left(\frac{2}{a}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2 + \left(\frac{2}{a}\right)^2 = 9$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2 + \left(\frac{2}{a}\right)^2 = 9$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{a}\right)^2 = 11$$



$$\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{a}\right)^2\right)^3 = \left(\frac{a}{2}\right)^6 + 3\left(\frac{a}{2}\right)^4\left(\frac{2}{a}\right)^2 + 3\left(\frac{a}{2}\right)^2\left(\frac{2}{a}\right)^4 + \left(\frac{2}{a}\right)^6 = 11^3$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^6 + 3\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{2}{a}\right)^2 + \left(\frac{2}{a}\right)^6 = 11^3$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^6 + 3\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{a}\right)^2\right) + \left(\frac{2}{a}\right)^6 = 11^3$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^6 + \left(\frac{2}{a}\right)^6 = 11^3 - 3 \cdot 11 = 11(121 - 3) = 11 \cdot 118 = 1298$$

$$\begin{array}{r} \times 118 \\ 11 \\ \hline 118 \\ 118 \\ \hline 1298 \end{array}$$

Ответ: 1298.

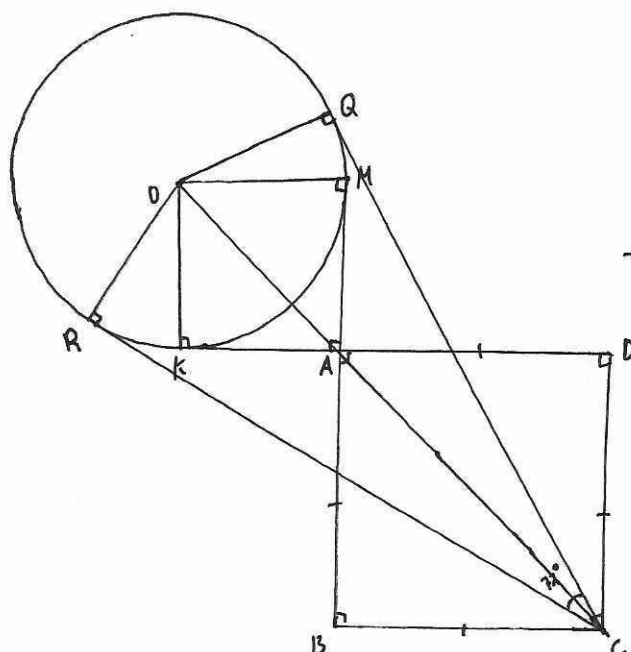
(+) задача
решена верно.

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Бланк олимпиадной работы



н 2

свойству

По свойству касательных

$AM = AK$; $OM \perp AM$; $OK \perp AK$; $AM \perp AK$ т.к. $ABCO$ - квадрат.

$\angle OMA = 90^\circ$; $\angle OKA = 90^\circ$; $\angle KAM = 90^\circ$ т.

$\rightarrow OMAK$ - прямоугольник т.

$\rightarrow AM = AK = OK = OM \rightarrow OMAK$ - квадрат

$OM = OK = OR = OQ = r$ (как радиусы)

Путь стороны квадрата - a

$\angle OAM = 45^\circ$ т.к. $OM = MA$ т. $\triangle OMA$ п/б

$\angle OAM = \angle AOM$ т. $\angle OAM = \frac{1}{2}(180^\circ - 90^\circ) = 45^\circ$

Аналогично $\angle CAP = 45^\circ$

$\angle MAD = 90^\circ$ т.к. $\angle MAD = 180^\circ - \angle BMD = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

$\angle OAC = 45^\circ + 90^\circ + 45^\circ = 180^\circ$ т. O, A, C ;

лежат на одной прямой т.

свойству

$\rightarrow OC = OA + AC$; По свойству касательной: $OR \perp RC$ т. $\triangle ORC$ п/б $OR = r = OC \sin \angle OCR$

По свойству касательной: $OC \perp RC$ т. OC - биссектриса угла $\angle RCA$ т. $\angle OCA = \frac{1}{2} \angle RCA = \frac{1}{2} \cdot 72^\circ = 36^\circ$ т. $r = OC \cdot \sin 36^\circ$

По т. Пифагора:

$$OA^2 = OR^2 + RA^2 = r^2 + r^2 = 2r^2;$$

$$OA = r\sqrt{2};$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = (2r)^2 + (2r)^2 = 8r^2 \Rightarrow 2a^2 = 2(2 - \sqrt{5 - \sqrt{5}}) \sqrt{2}$$

$$AC = (2 - \sqrt{5 - \sqrt{5}}) \sqrt{2}$$

$$r = (2\sqrt{2} + (2 - \sqrt{5 - \sqrt{5}})\sqrt{2}) \cdot \frac{\sqrt{5 - \sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$$

$$2r = (2 + 2 - \sqrt{5 - \sqrt{5}}) \sqrt{5 - \sqrt{5}}$$

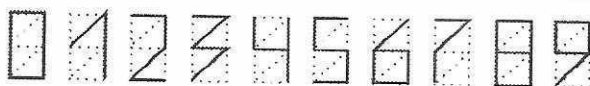
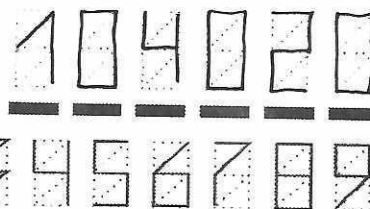
$$2r = 1\sqrt{5 - \sqrt{5}} + (2 - \sqrt{5 - \sqrt{5}}) \sqrt{5 - \sqrt{5}}$$

$$2(2 - \sqrt{5 - \sqrt{5}}) = (2 - \sqrt{5 - \sqrt{5}}) \sqrt{5 - \sqrt{5}}$$

$$r = \sqrt{5 - \sqrt{5}}$$

Ответ: $r = \sqrt{5 - \sqrt{5}}$.

⊕ задача решена верно.



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Бланк олимпиадной работы

№ 5

Найдем какие значения k удовлетворяют условию $x_1 \leq 2x_2$

$$(k^2 - 2k - 3)x^2 + (3k - 5)x + 2 = 0$$

$$\begin{aligned} D &= (3k - 5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (k^2 - 2k - 3) = 9k^2 - 30k + 25 - 8k^2 + 16k + 24 = \\ &= k^2 - 14k + 49 = (k - 7)^2 \end{aligned}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(3k - 5) \pm (k - 7)}{2} = \frac{5 - 3k \pm (k - 7)}{2} = \begin{cases} \frac{5 - 3k + k - 7}{2} = \frac{-2k - 2}{2} = -k - 1 \\ \frac{5 - 3k - k + 7}{2} = \frac{-4k + 12}{2} = -2k + 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} -k - 1 \leq -4k + 12 \\ -2k + 6 \leq -2k - 2 \\ k \in [3; 8] \end{cases} & \begin{cases} 3k \leq 13 \\ 6 \leq -2 \\ k \in [3; 8] \end{cases} & \begin{cases} k \leq \frac{13}{3} \\ k \in \emptyset \\ k \in [3; 8] \end{cases} & \Leftrightarrow k \in [3; \frac{13}{3}] \end{cases}$$

$$\rho = \frac{m}{n}$$

$$m = \frac{13}{3} - 3 = \frac{13 - 9}{3} = \frac{4}{3}$$

$$n = 8 - 3 = 5$$

$$\rho = \frac{4}{3 \cdot 5} = \frac{4}{15} \approx 0,267$$

Ответ: $\rho = \frac{4}{15} \approx 0,267$.



задача решена
верно.

$$(ab)c = a(bc)$$

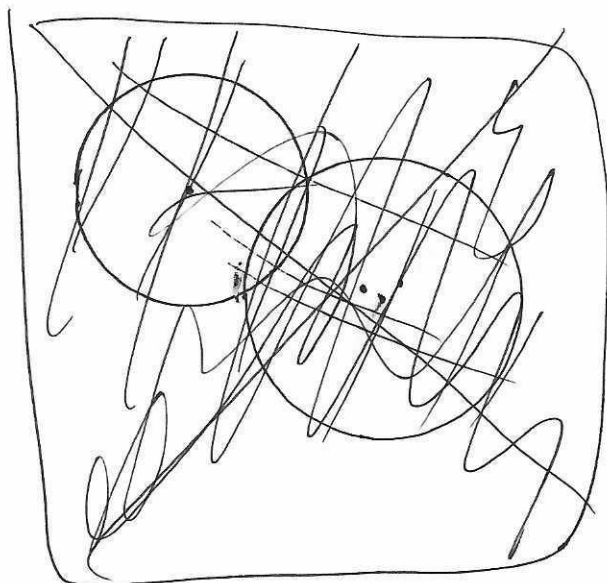
$$E = mc^2$$



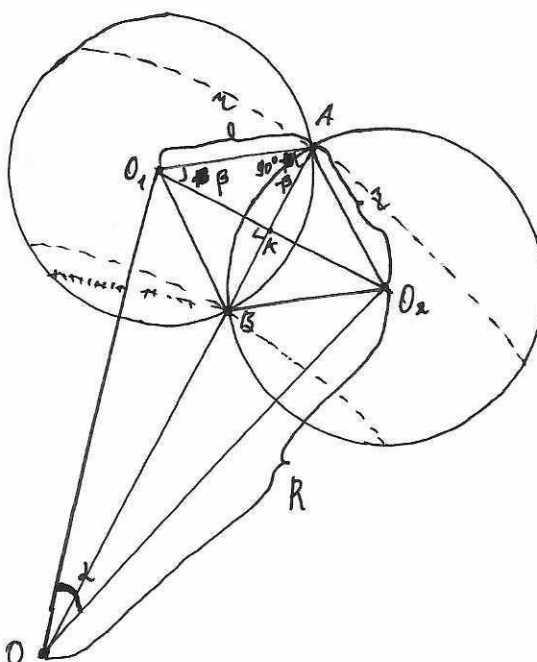
Бланк олимпиадной работы

№4

Для достижения максимального расстояния радары необходимо располагать равномерно по окружности:



O - центр трансформации



(полюс две соседние окружности)

т.к. расположение равномерное образуем 7 равных углов α причем $7\alpha = 360^\circ$

$$\alpha = \frac{360^\circ}{7}$$

$$AO_1 = AO_2 = r \rightarrow \Delta AO_1O_2 - \text{равн.}$$

$$O_1B = BO_2 = r \rightarrow \Delta BO_1O_2 - \text{равн.}$$

$$OO_1 = OO_2 = R \rightarrow \Delta OO_1O_2 - \text{равн.}$$

— равнобедренные треугольники

Опишем восьмиугольник по O_1O_2 из A, B, O ;

по свойству равнобедренного треугольника:

$$OK_1 \perp O_1O_2 \rightarrow K_1 - \text{середина } O_1O_2$$

$$AK_2 \perp O_1O_2 \rightarrow K_2 - \text{середина } O_1O_2$$

$$BK_3 \perp O_1O_2 \rightarrow K_3 - \text{середина } O_2O_1$$

Следовательно $K_1 \equiv K_2 \equiv K_3$ есть это будет точка

Бланк олимпиадной работы

Значит O, B, A лежат на одной прямой и
так как ~~на рисунке~~ рисунок справедлив для любых двух соседних
окружностей AB - ширина кольца покрытия $AB = 20$ км

$$\left. \begin{array}{l} O_1 B = O_1 A = r \\ O_1 O_2 - \text{общая} \\ O_2 A = O_2 B = r \end{array} \right\} \rightarrow \angle O_1 O_2 A = \angle O_1 O_2 B \text{ (по III признаку равенства треугольников)}$$

Следовательно $\angle O_1 O_2 B = \angle O_1 O_2 A$

$$\left. \begin{array}{l} KO_2 - \text{общая} \\ \angle O_1 O_2 B = \angle O_1 O_2 A \\ O_2 B = O_2 A = r \end{array} \right\} \rightarrow KO_2 B = KO_2 A \text{ (по I признаку равенства треугольников)}$$

$$BK = AK = \frac{1}{2} AB = 10 \text{ км}$$

Пусть

$$AB = d \text{ тогда } BK = AK = \frac{d}{2}$$

$$\sin \beta = \frac{d}{2r}$$

$$\sin(90^\circ - \beta) = \cos \beta = \sqrt{1 - \frac{d^2}{4r^2}} = \sqrt{\frac{4r^2 - d^2}{4r^2}} = \frac{\sqrt{4r^2 - d^2}}{2r}$$

По теореме синусов:

$$\frac{O_1 O}{\sin \angle O_1 A O} = \frac{O_1 A}{\sin \angle O_1 O A}$$

$$\sin \angle O_1 A O = \sin(90^\circ - \beta) = \frac{\sqrt{4r^2 - d^2}}{2r};$$

$$\frac{R}{\sqrt{4r^2 - d^2}} = \frac{r}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$R = \frac{\sqrt{4r^2 - d^2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{7}$$

$$R = \frac{\sqrt{4r^2 - d^2}}{2 \sin \frac{\pi}{7}} = \frac{\sqrt{4 \cdot 26^2 - 20^2}}{2 \sin \frac{\pi}{7}} = \frac{\sqrt{(52-20)(52+20)}}{2 \sin \frac{\pi}{7}} = \frac{\sqrt{16 \cdot 72}}{2 \sin \frac{\pi}{7}} = \frac{\sqrt{16 \cdot 9^2}}{2 \sin \frac{\pi}{7}} = \frac{8 \cdot 9}{\sin \frac{\pi}{7}} = \frac{72}{\sin \frac{\pi}{7}}$$

$$S = \pi(R + \frac{d}{2})^2 - \pi(R - \frac{d}{2})^2 = \pi(R^2 + Rd + \frac{d^2}{4} - R^2 + Rd - \frac{d^2}{4}) =$$

$$= 2\pi R d = \frac{2\pi \cdot 72 \cdot 20}{\sin \frac{\pi}{7}} = \frac{2880}{\sin \frac{\pi}{7}}$$

Бланк олимпиадной работы

Ответ: $R = \frac{72}{\sin \frac{\pi}{7}}$; $S = \frac{2880}{\sin \frac{\pi}{7}}$;

№3

$$\begin{cases} x^2 - 23y + 66z + 612 = 0 \\ y^2 + 62x - 20z + 296 = 0 \\ z^2 - 22x + 67y + 505 = 0 \\ x^2 - 23y + 2 \cdot 3 \cdot 11z + 4 \cdot 9 \cdot 17 = 0 \\ y^2 + 2 \cdot 3 \cdot 11x - 4 \cdot 5z + 8 \cdot 37 = 0 \\ z^2 - 11 \cdot 2x + 67y + 5 \cdot 101 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 23y + 66z + 612 = 0 \\ y^2 + 62x - 20z + 296 = 0 \\ z^2 - 22x + 67y + 505 = 0 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 44y + 40x + 46z + 1415 = 0$$

$$x < 0; y < 0; z < 0;$$

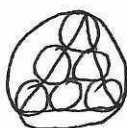
задача не решена

05

$$x^2 + y^2 + z^2 + 44y + 40x + 46z + 1415 = 0$$

$$x < 0; y < 0; z < 0;$$

№6

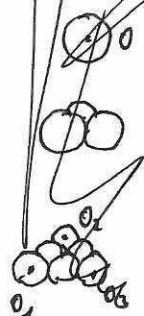


$R = 5\sqrt{2} + 5$ - радиус описанной окружности около пирамиды

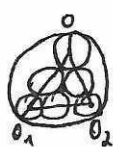
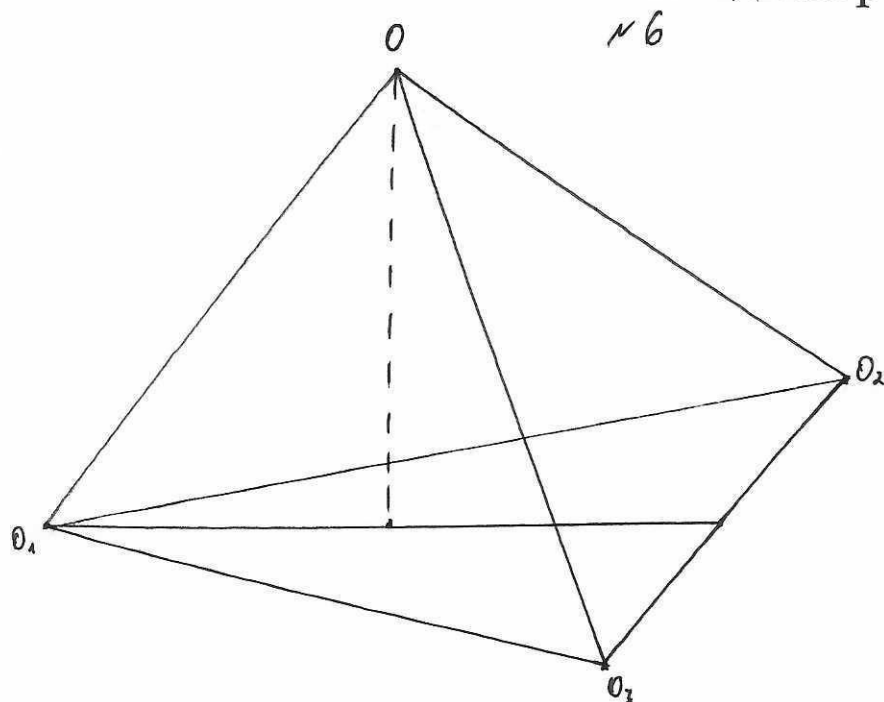
$R = \frac{a}{\sqrt{3}}$ - радиус описанной окружности около равностороннего треугольника, где $a = a_1 a_2$ и радиус шара

$$a = R\sqrt{3} = 5(\sqrt{2} + 1)\sqrt{3}$$

$$r = \frac{a}{6} = \frac{5(\sqrt{2} + 1)\sqrt{3}}{6} = \frac{5}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$



Бланк олимпиадной работы



$$R = 5\sqrt{2} + 5$$

$$R = 4 + \frac{a}{\sqrt{3}}, \text{ где } a = 4\sqrt{2}$$

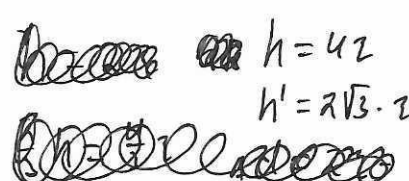
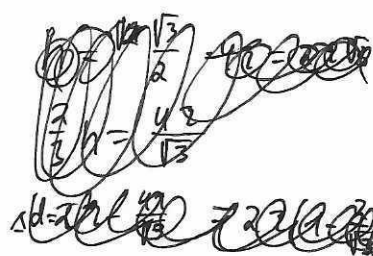
$$R = 2\left(1 + \frac{4}{\sqrt{3}}\right) - ?$$

$$r = \frac{5(\sqrt{2}+1)\sqrt{3}}{\sqrt{3}+4} = \frac{5(\sqrt{2}+1)(-\sqrt{3}+4)\sqrt{3}}{4^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{5(\sqrt{2}+1)(4\sqrt{3}-3)}{13}$$

радиус шара, оо у которого есть пирамида

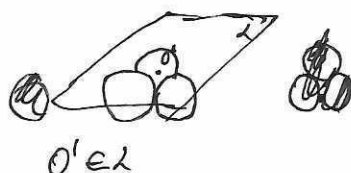
нет обоснования
решения.

не указано
расположение
вписанного шара



$$4d = \frac{h-h'}{2} = \sqrt{2} \cdot 2(2-\sqrt{3})$$

$$4d = 2\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$



$$l = 2\sqrt{2} \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$



ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

ШИФР

1 0 4 0 2 0

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



$$\sqrt{\frac{4z^2}{3} + z^2} = \sqrt{\frac{7z^2}{3}} = \text{Бланк олимпиадной работы}$$

$$= \sqrt{\frac{7}{3}} z$$

$$r' = z(\sqrt{\frac{7}{3}} - 1) - 4z = z(\sqrt{\frac{7}{3}} - 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}) =$$

$$= \frac{\sqrt{21}}{6} z(\sqrt{\frac{21}{3}} - 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}) =$$

$$= \frac{z}{6}(2\sqrt{21} - 12 + 3\sqrt{3}), \text{ где } z - \text{ радиус шаров, из которых состоит пирамида}$$

